

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-RALEIGH, USA.

K. GIRKMANN-WIEN · F. JUNG-WIEN · F. MAGYAR-WIEN

E. MELAN-WIEN · H. MELAN-WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

F. MAGYAR-WIEN

BAND VI, HEFT 2

MIT 39 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 28. JANUAR 1952)



WIEN

SPRINGER-VERLAG

1952

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 bis 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

*an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)
Wien I, Mölkerbastei 5*

zu senden.

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in diesen drei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzeilen mitzuliefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftungen nur in Bleistift ausführen) oder in klaren, verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten 75 Sonderdrucke ihrer Beiträge kostenlos und können weitere Exemplare (maximal 125 Exemplare), falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

Band VI, Heft 2

Inhaltsverzeichnis

Originalarbeiten.

	Seite
R. von Mises , Über einige Grundfragen der Hydrodynamik	77
E. G. Richardson , Turbulence and Silt-Load in Water Channels. (With 8 Figures)	86
H. Hinteregger , Drehzahlmessung, Geschwindigkeitsmessung und Durchflußmessung mit Hilfe unipolarer Induktion. (Mit 8 Textabbildungen)	93
H. W. Franke , Spektrographische und elektronenoptische Kenngrößen bei Richtungs-doppelfokussierung. (Mit 2 Textabbildungen)	105
G. Heinrich , Die Mißweisungen des künstlichen Kreiselhorizontes nach Fleuriais. (Mit 5 Textabbildungen)	113
H. Watzlawek , Die Bineutronen-Perioden der Reinelemente. II. Teil. (Mit 6 Textabbildungen)	126
F. Vitovec , Über die Temperaturabhängigkeit der Quersahl der Metalle. (Mit 2 Textabbildungen)	132
H. Herglotz , Eine Röntgenröhre mit Durchstrahlanode zur Sekundärerregung von Röntgenspektren. (Mit 8 Textabbildungen)	135

Buchbesprechungen

Bruyne, N. A. de, und R. Houwink, Adhesion and Adhesives (F. Vitovec und V. Gutmann). — Föppl, L., und G. Sonntag, Tafeln und Tabellen zur Festigkeitslehre (E. Czitary). — Kneissler, L., Die Maxwellsche Theorie in veränderter Formulierung (R. Bruniak). — Müller, C., Zur mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen (L. Kneissler). — Oldenburger, R., Mathematical Engineering Analysis (H. Haberl). — Pröll, A., Grundlagen der Aeromechanik und Flugmechanik (E. Souczek). — Ryan, L. F., Experiments on Aerodynamic Cooling; Degen, M., Untersuchungen an einem Gegenlaufpropeller im Windkanal (R. Bruniak). — Whitehead, S., Dielectric Breakdown of Solids (E. F. Petritsch).

Über einige Grundfragen der Hydrodynamik.

Von R. von Mises, Harvard University, USA.

Zusammenfassung. Es wird das Auftreten von Unstetigkeiten in den Integralen der hydrodynamischen Grundgleichungen untersucht, wobei die übliche Adiabatenbedingung durch eine in weitem Maße verallgemeinerte Bedingung ersetzt ist. Die wesentlichen Resultate sind: 1. Bei Abwesenheit von Zähigkeit und Wärmeleitung führt die Theorie der Charakteristiken zu zwei Typen möglicher Unstetigkeiten: a) dem Typus, der im Helmholtz'schen Strahlproblem, in der Lanchester-Prandtl'schen Tragflügeltheorie und in den sog. Contact discontinuities der kompressiblen Flüssigkeit vorliegt; b) dem Typus, der von der Potentialtheorie bei Überschallgeschwindigkeit geläufig ist. 2. Wenn Zähigkeit oder Wärmeleitung oder beides vorhanden ist, gibt die Charakteristikentheorie nur Unstetigkeiten vom Typus a). Andererseits gibt es hier (ähnlich wie in der Grenzschichttheorie) asymptotische Integrale für unendlich werdende Reynoldszahl oder Prandtlzahl (oder beide) und diese stellen das dar, was man üblicherweise Stoßvorgänge nennt.

Summary. The author studies the possible discontinuities appearing in the solutions of the hydrodynamic equations whereby the usual adiabatic condition is replaced by a widely more general relation. The principal results are as follows. 1. In the case of a fluid without viscosity and heat conduction the theory of characteristics leads to two different types of discontinuities: a) Those which are found in the jet problem of Helmholtz, in the wing theory of Lanchester-Prandtl, and in the so-called contact discontinuities of compressible fluids; b) those discontinuities which are well known from the theory of potential flow at supersonic velocities. 2. In the presence of viscosity and/or heat conduction the theory of characteristics admits only discontinuities of type a). In this case, however, one can find asymptotic integrals (in a similar way as in the theory of boundary layers) for Reynolds number and/or Prandtl number tending to infinity. These asymptotic integrals represent the flow patterns that are usually called shocks.

Résumé. Les discontinuités qui peuvent apparaître dans les intégrales des équations hydrodynamiques sont étudiées sous l'hypothèse que la condition adiabatique usuelle est remplacée par une relation bien plus générale. Les résultats principaux sont les suivants: 1° Pour un fluide sans viscosité et sans conduction thermique la théorie des caractéristiques fournit deux types différents de discontinuités: a) Celles qui se trouvent dans le problème de jets de Helmholtz, dans la théorie des ailes sustentatrices de Lanchester et Prandtl et dans les «Contact Discontinuities» des fluides compressibles; b) celles qui sont connues de la théorie des mouvements à potentiel pour les vitesses supersoniques. 2° En présence de viscosité ou de conduction thermique (ou de toutes les deux) la théorie des caractéristiques n'admet que les discontinuités du type a). D'autre part, en ce cas, on peut déduire (à peu près de la même façon que dans la théorie des couches limites) des intégrales asymptotiques pour le nombre de Reynolds ou le nombre de Prandtl (ou tous les deux) tendant vers l'infini. Ces intégrales asymptotiques représentent ce qu'on appelle habituellement des chocs.

1. Einleitung.

Diese Arbeit befaßt sich mit mathematischen Fragen der Gasdynamik. Es soll untersucht werden, welche Folgerungen aus den vorgegebenen Differentialgleichungen gezogen werden können, ohne daß man irgendwelche weitere Annahmen, die sich aus der Beobachtung oder aus anderen Theorien ergeben, hinzufügt. Zunächst soll der mathematische Ansatz in allgemeiner Form festgelegt werden.

Man betrachtet fünf Unbekannte, und zwar die drei Komponenten des Geschwindigkeitsvektors v , den Druck p und die Dichte ρ , welche Funktionen der vier unabhängigen Veränderlichen x, y, z, t sind. Gelegentlich werden an Stelle von p

oder ϱ oder von beiden gewisse Funktionen von p und ϱ benützt, wie z. B. die durch die Zustandsgleichung bestimmte Temperatur T oder die Entropie S oder die innere Energie U . Fünf Gleichungen sind zur Bestimmung der Unbekannten erforderlich.

Die ersten drei können als eine Vektorgleichung (Newtonsche Gleichung¹) zusammengefaßt werden

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\varrho} \text{grad } p = \mathfrak{K}. \quad (1) \text{ bis } (3)$$

Was unter \mathfrak{K} zu verstehen ist, wird sogleich erörtert werden. Die nächste Gleichung ist die Kontinuitätsbedingung

$$\varrho \operatorname{div} v + \frac{d\varrho}{dt} = 0. \quad (4)$$

Zu diesen allgemein gültigen Gleichungen muß man eine fünfte hinzufügen, welche den besonderen Typus der betrachteten Strömung kennzeichnet. Gewöhnlich, zumindest für die sog. ideale Flüssigkeit, wird angenommen, daß eine endliche Beziehung zwischen p und ϱ existiert, wodurch die Zahl der Unbekannten tatsächlich auf vier reduziert wird („elastische“ Flüssigkeit). Für unsere Zwecke wäre dies eine zu enge Voraussetzung. Andererseits besteht keine generelle Vereinbarung über eine angemessene allgemeine Form der spezialisierenden Gleichung. Für die vorliegende Untersuchung wird der Ansatz

$$A \frac{dp}{dt} + B \frac{d\varrho}{dt} = C \quad (5)$$

vorgeschlagen, der alle Fälle, die bisher behandelt wurden, einschließt. Z. B. können A und B die Ableitungen der Entropie nach p und ϱ und C die als Funktion der abhängigen und unabhängigen Veränderlichen gegebene Wärmezufuhr sein. Man erkennt, daß der „elastische“ Fall, das heißt der Fall einer endlichen p, ϱ -Beziehung, in (5) mit $C = 0$ mitenthalten ist, wenn eine entsprechende Randbedingung hinzugefügt wird.

Natürlich muß über die Koeffizienten A, B, C und \mathfrak{K} etwas angenommen werden. Wir werden zwei Probleme unterscheiden: 1. Den „idealen“ Fall, in dem A, B, C, \mathfrak{K} gegebene Funktionen der neun skalaren Veränderlichen $v_x, v_y, v_z; p; \varrho; x, y, z, t$ sein können, ohne aber irgendwelche Ableitungen zu enthalten; 2. den allgemeineren Fall, bei welchem in den Definitionen von A, B, C, \mathfrak{K} auch bestimmte Ableitungen erster und zweiter Ordnung von v, p, ϱ zugelassen sind.

Im Fall 1 und allgemeiner im Fall 2, wenn A, B, C, \mathfrak{K} nur örtliche Ableitungen enthalten, drücken die Ansätze (1) bis (5) offenbar folgendes aus: In jedem Augenblick und für jedes Teilchen sind die substantiellen Änderungen d/dt der Unbekannten v, p, ϱ explizit als Funktionen des augenblicklichen Zustandes der Flüssigkeit in dem betrachteten Punkt und in seiner Nachbarschaft erster Ordnung gegeben.

2. Diskontinuierliche Lösungen.

Im idealen Fall, für welchen A, B, C, \mathfrak{K} keine Ableitungen enthalten, haben die Gl. (1) bis (5) die Form eines „planaren“ Systems von Gleichungen erster Ordnung („planar“ bedeutet linear in den Ableitungen, aber nicht notwendigerweise linear im üblichen Sinn). Wenn wir einheitlich die Unbekannten mit u_i ($i = 1, 2, \dots, m$) und die unabhängigen Veränderlichen mit x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) bezeichnen, so kann ein planares System geschrieben werden

$$a_{ijk} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

¹ Vektorsymbole, wie grad, div usw., beziehen sich durchwegs auf den dreidimensionalen x, y, z -Raum.

wobei für die Summierung die übliche Vereinbarung gilt² und die a_{ijk} und b_k Funktionen der x_j und u_i allein sind. Wir nehmen $m \geq n$ an. Die im wesentlichen von T. Levi-Civita entwickelte Theorie der Charakteristiken lehrt folgendes:

Wenn S eine beliebige Fläche im n -dimensionalen Raum ist, können im allgemeinen die Werte aller u_i willkürlich auf S angenommen werden, und es ist dann möglich, aus (6) die u_i auf beiden Seiten in der Nachbarschaft von S in eindeutiger Weise zu berechnen (Cauchysches Problem). Es existieren jedoch Ausnahmsflächen S^* , die wir Trennungsflächen nennen wollen. Wenn $\bar{\lambda}$ ein Vektor senkrecht zu S^* ist, müssen seine Komponenten λ_j der Gleichung

$$\|\lambda, a_{ijk}\| = 0 \quad (7)$$

genügen, wobei die linke Seite eine Determinante m -ter Ordnung bedeutet, deren Element in der i -ten Reihe und k -ten Spalte die Summe $\lambda_j a_{ijk}$ ist. Mit Bezug auf S^* kann der Ansatz (6) durch Linearkombination so transformiert werden, daß er sich in zwei Teile spaltet. Ein Teil, sagen wir r Gleichungen, enthält nur Ableitungen der u_i in der Richtung senkrecht zu $\bar{\lambda}$, das heißt parallel zu S^* . Wir nennen diese Gleichungen Kompatibilitätsbedingungen, weil sie die Willkürlichkeit der Wahl der u_i -Werte auf S^* einschränken. Ihre Anzahl r ist im allgemeinen gleich der Vielfachheit der Wurzel $\bar{\lambda}$ in der algebraischen Gleichung m -ter Ordnung (7). Jede der hinzutretenden $(m - r)$ Gleichungen enthält mindestens eine Ableitung eines u_i in der Richtung von $\bar{\lambda}$. — Auf dieser Grundlage können wir den Begriff der „diskontinuierlichen Lösungen“ des Systems (6) in der folgenden Weise einführen.

Eine Gruppe von Funktionen u_i soll eine diskontinuierliche Lösung von (6) genannt werden, wenn a) längs einer Fläche S^* zumindest eines der u_i oder eine ihrer Ableitungen beim Durchgang durch S^* einen Sprung hat; wenn b) an beiden Seiten von S^* alle Differentialgleichungen (6) befriedigt sind und wenn c) ein Sprung eines der u_i nur erlaubt ist, sobald die Werte $\pm \infty$ für die Ableitung dieses u_i in der Richtung $\bar{\lambda}$ keiner der $(m - r)$ Zusatzgleichungen widersprechen. Die letzte Bedingung kann als in der zweiten enthalten angesehen werden, wenn man annimmt, daß ein endlicher Sprung einen unendlichen Differentialquotienten bedingt.

Gewöhnlich werden die Trennungsflächen S^* als Charakteristiken bezeichnet. Wir wollen diesen Ausdruck lieber vermeiden, weil Charakteristiken oft als Flächen definiert werden, bei deren Durchgang Ableitungen der Variablen unstetig werden, nicht aber die Veränderlichen selbst. Die Identifikation von Trennungsflächen und Charakteristiken (nach dieser Definition) ist die Ursache vieler Unklarheiten.

3. Ideale Flüssigkeitsströmung.

Wenden wir nun die obigen Betrachtungen auf die Gleichungsgruppe (1) bis (5) in dem „idealen“ Fall 1 an. Die Koeffizienten a_{ijk} von (6) und folglich auch die Trennungsflächen sind in diesem Falle unabhängig von den Größen \mathfrak{K} und C auf der rechten Seite der Gl. (1) bis (3) und (5). Da sich die Gl. (7) auf einen einzelnen Punkt in dem Raum von $n = 4$ Dimensionen bezieht, können wir der Einfachheit halber die x -Richtung parallel zu v in diesem Punkt wählen. Ferner führen wir den Quotienten

$$-\frac{B}{A} = a^2 \quad (8)$$

ein und deuten damit an, daß A und B verschiedene Vorzeichen haben. Wenn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ die

² Das Summenzeichen Σ ist weggelassen; über jeden Index, der mehr als einmal in dem Ausdruck vorkommt, ist zu summieren.

Komponenten von $\bar{\lambda}$ in der x -, y -, z -, t -Richtung sind, zeigt eine einfache Rechnung, daß die Gl. (7) in

$$(v \lambda_1 + \lambda_4)^3 [(v \lambda_1 + \lambda_4)^2 - a^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)] = 0 \quad (9)$$

übergeht.

Demgemäß haben wir zwei Typen von Trennungsflächen. Die dreifache Wurzel, die dem ersten Faktor entspricht, definiert Flächen, die aus Weg-Zeit-Linien (oder Weltlinien, wie sie in der Relativitätstheorie genannt werden) bestehen, die im Falle einer stationären Strömung mit den Stromlinien zusammenfallen. Die drei Kompatibilitätsbedingungen bestehen aus Gl. (5) und aus zwei Komponenten der Newtonschen Gleichung. Die zwei zusätzlichen Gleichungen sind die dritte Komponente der Newtonschen Gleichung (in der $\bar{\lambda}$ -Richtung) und die Kontinuitätsgleichung (4). Da die erste die Ableitung von p in der $\bar{\lambda}$ -Richtung und die zweite dieselbe Ableitung der Geschwindigkeitskomponente in der Richtung normal zum Schnitt s^* von S^* mit dem x -, y -, z -Raum enthält, können zufolge der Bedingung (c) diese zwei Veränderlichen keine Unstetigkeit besitzen. Nur ϱ und die zwei tangentialen Komponenten von v können einer plötzlichen Änderung unterliegen. Bekannte Beispiele solcher Trennungerscheinungen liegen bei dem (stationären) Helmholtzschen Strahlproblem vor, wo ϱ und v beim Durchgang durch bestimmte Stromflächen springen, ferner bei der sog. Wirbelschicht in der Lanchester-Prandtlschen Tragflügeltheorie, wo nur v diskontinuierlich in den Punkten einer Fläche s^* ist, die aus Stromlinien besteht, und bei den sog. Berührungsdiskontinuitäten (contact discontinuities) in kompressiblen Strömungen. Man beachte, daß in dem allgemeinen Fall nichtstationärer Strömung (ob kompressibel oder nicht) jede Fläche im x -, y -, z -Raum, wie immer ihre relative Lage zu den Geschwindigkeitsvektoren sein mag, eine Trennungsfläche mit verschiedenen Werten der Dichte ϱ und der tangentialen Geschwindigkeitskomponenten auf beiden Seiten der Fläche sein kann. Eine solche Diskontinuitätsfläche bewegt sich mit den sie bildenden Flüssigkeitsteilchen.

Zwei Bemerkungen mögen hinzugefügt werden. Erstens, daß die Stetigkeit von p aus den Differentialgleichungen (1) bis (5) und der allgemeinen Definition der diskontinuierlichen Lösungen folgt und nicht unter Heranziehung fremder Prinzipien (Newtons *lex tertia*) abgeleitet zu werden braucht (wie es z. B. von Levi-Civita getan wurde). Zweitens, daß die hier in Rede stehenden Diskontinuitäten nichts mit Stößen zu tun haben — die in der Theorie der idealen Flüssigkeiten überhaupt nicht auftreten —, sondern eine Erscheinung bilden, die auch bei inkompressiblen Flüssigkeiten zu verzeichnen ist.

Der zweite Typus von Trennungsflächen, die durch den zweiten Faktor von (9) bestimmt werden, sind aus der Theorie der Potentialströmung wohlbekannt. Der Kegel zweiter Ordnung im vierdimensionalen Raum durchschneidet den x -, y -, z -Raum in einem Kegel, der senkrecht zu dem sog. Machschen Kegel steht. Der Schnitt ist nur reell, wenn $a^2 \leq v^2$ ist. Die Wurzeln sind einfach und die Kompatibilitätsbedingung lautet

$$\bar{\lambda} \left(\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\varrho} \text{grad } p \right) - \left(a \text{ div } v + \frac{1}{\varrho a} \frac{dp}{dt} \right) = \bar{\lambda} \mathfrak{K} + |\lambda| \frac{1}{\varrho} \sqrt{\frac{-C^2}{AB}}. \quad (10)$$

Wenn diese Bedingung auf eine stationäre, zweidimensionale Strömung mit $\mathfrak{K} = 0$, $C = 0$ angewendet wird, vereinfacht sie sich zu der bekannten Beziehung

$$\frac{\partial p}{\partial l} = - \varrho v^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial l} \text{tg } \alpha, \quad (11)$$

worin α den Machschen Winkel, ϑ den Winkel zwischen v und einer festen Richtung und $\partial/\partial l$ die Differentiation in der Richtung der Charakteristik (normal zu $\bar{\lambda}$) bedeutet.

Die vier Gleichungen, zusätzlich zu (10), enthalten die $\bar{\lambda}$ -Ableitungen aller fünf Unbekannten. Daher folgt, daß hier keine der Größen v , p , q beim Durchgang durch die Trennungsfläche einen Sprung haben kann. Nur die Ableitungen können unstetig sein. — Eine weitere Diskussion dieser bekannten Erscheinung, die in den modernen Lehrbüchern der Gasdynamik ausführlich erörtert wird, dürfte entbehrlich sein. Es möge nur festgestellt werden, daß bei unserer allgemeinen Form der spezialisierenden Gl. (5) und einem willkürlichen Ausdruck \mathfrak{K} in der Newtonschen Gleichung sich alles ebenso verhält wie bei der Potentialströmung.

4. Zähigkeit und Wärmeleitung.

Wir werden nun zulassen, daß die rechtsseitigen Glieder \mathfrak{K} und C in den Gl. (1) bis (5) auch von Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Unbekannten v , p , q abhängen. Insbesondere nehmen wir an, daß \mathfrak{K} ein linearer Ausdruck in den neun Ableitungen zweiter Ordnung von v nach x , y , z ist und C linear in den zweiten Ableitungen von p und q (oder solchen einer gegebenen Funktion T von p und q) nach denselben Veränderlichen. Damit wird in weitem Umfang der Fall einer zähen und wärmeleitenden Flüssigkeit gedeckt. — Es wird manchmal behauptet, daß unter diesen Bedingungen keine Trennungsflächen existieren; dies ist nicht zutreffend.

Die Gl. (1) bis (5) müssen nun als ein planares System von Gleichungen zweiter Ordnung angesehen werden. Sie haben die allgemeine Form

$$a_{ijk} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (12)$$

und die Bedingung dafür, daß ein Vektor $\bar{\lambda}$ senkrecht zu einer Trennungsfläche steht, ist gegeben durch die Determinantenbedingung

$$\|\lambda_j \lambda_l a_{ijk}\| = 0. \quad (13)$$

Dies ist eine algebraische Gleichung vom Grad $2m$ für die Komponenten von $\bar{\lambda}$. In unserem Falle tritt eine unbedeutende Änderung ein, weil die Gl. (4) unseres Systems keine Ableitungen zweiter Ordnung enthält. Dies reduziert den Grad von (13) auf $2m - 1$.

Wenn (13) auf das System (1) bis (5) angewendet wird, hat das Resultat die Form

$$(v \lambda_1 + \lambda_4) P_6(\bar{\lambda}) P_2(\bar{\lambda}) = 0, \quad (14)$$

worin das Polynom 6. Ordnung P_6 ausschließlich von den Gliedern 2. Ordnung in \mathfrak{K}_1 (Zähigkeitsglieder) und P_2 nur von denen in C (Wärmeleitungsglieder) abhängig ist. Wenn die Navier-Stokessche Theorie der Zähigkeit zugrunde gelegt wird und die Wärmeleitungsglieder in der üblichen Form $\text{div}(k \text{ grad } T)$ angenommen werden, findet man $P_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ und $P_6 = P_2^3$. Im allgemeinen scheint es gerechtfertigt zu vermuten, daß für irgendeine vernünftige Annahme über Zähigkeit und Wärmeleitung P_2 und P_6 , wie in dem speziellen Fall, keine reellen Wurzeln besitzen, was bedeutet, daß die zugehörigen Differentialoperatoren vom elliptischen Typus sind.

Unter diesen Bedingungen sind die einzigen reellen Trennungsflächen durch $v \lambda_1 + \lambda_4 = 0$ bestimmt. Das sind Flächen, die aus Weg-Zeit-Linien bestehen. Die Kompatibilitätsbedingung, die, wie unmittelbar zu sehen, keine zweiten Ableitungen senkrecht zu den Trennungsflächen enthält, lautet

$$\frac{d}{dt} \left(\text{div } v + \frac{1}{q} \frac{dp}{dt} \right) = 0. \quad (15)$$

Die zusätzlichen vier Gleichungen aufzustellen, um zu entscheiden, welche Veränderlichen oder Ableitungen sich sprunghaft ändern können, ist nur möglich, wenn die Zustandsgleichung, die Zähigkeits- und Wärmeleitungsglieder genauer spezialisiert werden. Unter üblichen Voraussetzungen können ϱ , die ersten Ableitungen von p und schließlich einige der zweiten Ableitungen von v unstetig sein. Beispiele in einer oder zwei Dimensionen können leicht angegeben werden.

5. Stoßvorgänge³.

Bisher war nicht die Rede von sog. Stoßvorgängen. Es ist wohlbekannt, daß Flüssigkeitsstöße nichts mit Charakteristiken oder Trennungsflächen zu tun haben. Es wird aber nicht so allgemein beachtet, daß Strömungen, die Stöße umfassen, in keiner Weise als diskontinuierliche Lösungen der Differentialgleichungen idealer Flüssigkeiten angesehen werden können; tatsächlich werden sie vollständig durch die Annahme über Zähigkeit und Wärmeleitung bestimmt.

Es besteht kein Zweifel darüber, daß es innerhalb des „idealen Falles“, in dem weder Zähigkeit noch Wärmeleitung auftritt, keinerlei Möglichkeit gibt, aus den Differentialgleichungen (1) bis (5) irgend etwas abzuleiten, was einen Stoß darstellt, da bestimmte wohlbekannte Merkmale der Stoßvorgänge, wie z. B. die Zunahme der Entropie im adiabatischen Fall, direkt diesen Gleichungen widersprechen. Wenn wir entweder Zähigkeit oder Wärmeleitung oder beides zulassen, eröffnet sich ein neuer Gedankengang. Wir können unter bestimmten Bedingungen asymptotische Lösungen der Differentialgleichungen ableiten, indem wir die Reynoldssche Zahl oder die Prandtlsche Zahl gegen Unendlich wachsen lassen, ähnlich wie dies in der Grenzschichttheorie geschieht. Diese neuen asymptotischen Integrale führen zu Strömungsformen mit Sprüngen einzelner der Veränderlichen. Wir werden dies zunächst unter der üblichen Voraussetzung der Navier-Stokesschen Gleichungen für die Zähigkeit und des üblichen Ausdruckes für die Wärmeleitung diskutieren; später werden wir untersuchen, welche allgemeineren Bedingungen zulässig sind.

Die Gl. (1) bis (5) können in dimensionslosen Veränderlichen geschrieben werden

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p &= \mathfrak{R}_1 + \frac{1}{R} \left(\Delta v + \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} v \right), \\ \operatorname{div} v + \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} &= 0, \\ T \frac{dS}{dt} &= C_1 + \frac{1}{PR} \operatorname{div} \operatorname{grad} T.\end{aligned}\tag{16}$$

Hierin ist R die Reynoldssche Zahl, P die Prandtlsche Zahl, T und S (Temperatur und Entropie) sind gegebene Funktionen von p und ϱ , und in C_1 ist die Wärmezufuhr von außen und der durch die Dissipation infolge Zähigkeit bedingte Wärmegewinn vereinigt. Die letzte Gl. (16) ist offenbar eine spezielle Form von (5), sobald T und S als Funktionen von p und ϱ ausgedrückt sind.

Nun denken wir uns eine willkürliche Fläche $\Phi(x, y, z, t) = 0$ im vierdimensionalen Raum und führen ein krummliniges, orthogonales Koordinatensystem ein, derart, daß eine Schar der Koordinatenlinien aus Normalen N zu $\Phi = 0$ besteht. Die Fläche $\Phi = 0$ schneidet den x -, y -, z -Raum, $t = \text{konst.}$, in einer bewegten zweidimensionalen Fläche Φ^* , deren Normalen n die Projektionen von N auf den x -, y -, z -Raum sind. Für jeden Wert von t ist die Oberfläche $\Phi^* = \text{konst.}$ die augenblick-

³ Vgl. R. v. Mises: On the thickness of a steady shock wave, J. aeronaut. Sci. **17**, 551—555 (1950).

liche Stoßfront. Jeder Punkt von Φ^* bewegt sich in der Richtung n mit einer Geschwindigkeit

$$w = - \frac{\partial \Phi / \partial t}{|\text{grad } \Phi|}. \quad (17)$$

Wir transformieren die Gl. (16) auf das krummlinige Koordinatensystem und fragen nach einem Integral folgender Art: Alle Ableitungen, mit Ausnahme derjenigen in der Richtung N , bleiben in endlichen Schranken, während jene in der Richtung von N mit dem Parameter R ins Unendliche anwachsen.

Führt man eine neue Veränderliche $\alpha = R N$ ein und nennt man u die Geschwindigkeitsdifferenz ($v_n - w$) und v' die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu n , so führt eine einfache Rechnung (genau ausgeführt in einer Arbeit von G. Ludford)⁴ zu dem Resultat: Ein Integral vom verlangten Typus existiert dann und nur dann, wenn die folgenden Gleichungen mit der einen unabhängigen Veränderlichen α eine beschränkte Lösung im ganzen Intervall $\alpha = -\infty$ bis $\alpha = +\infty$ besitzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial \alpha} &= 0, \quad \frac{\partial(\varrho u)}{\partial \alpha} = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial \alpha} &= \frac{3}{4} [\varrho u (u - c_1) + p]; \\ \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= P \varrho u \left[U - Q - \frac{u^2}{2} + c_1 u - c_2 \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Hierin ist U die Funktion der inneren Energie entsprechend den gegebenen Funktionen $T(p, \varrho)$ und $S(p, \varrho)$ und Q die totale Wärmezufuhr bis zu dem betrachteten Punkt; c_1, c_2 sind Integrationskonstanten (hinsichtlich α).

Aus den ersten zwei Gleichungen (18) erhalten wir

$$v' = \text{konst.}, \quad \varrho u = \text{konst.} = m \quad (19)$$

und nach Elimination von α aus der dritten und vierten

$$\frac{dT}{du} = \frac{4}{3} P \frac{U - Q - \frac{u^2}{2} + c_1 u - c_2}{u - c_1 + \frac{p}{m}}. \quad (20)$$

Unter der Voraussetzung, daß für m, c_1 und c_2 solche Werte gefunden werden können, die Zähler und Nenner von (20) gerade für zwei Wertepaare u_1, T_1 und u_2, T_2 zum Verschwinden bringen, werden diese zwei Punkte in der u, T -Ebene singuläre Punkte von (20), einer ein Sattelpunkt, der andere ein Knotenpunkt, und es existiert ein und nur ein Integral, das diese beiden Punkte verbindet, und im Zusammenhang mit (18) längs der ganzen α -Achse beschränkt ist. Hierbei entspricht, wenn $u > 0$ der Wert $\alpha = -\infty$ dem singulären Punkt mit dem größeren u (und dem kleineren T) und umgekehrt für $\alpha = +\infty$. Wenn diese zwei Punkte mit 1 und 2 bezeichnet werden, lauten die zwei Bedingungen, welche das Verschwinden des Zählers und Nenners von (20) ausdrücken

$$\begin{aligned} m c_1 &= m u_1 + p_1 = m u_2 + p_2, \\ m c_2 &= m \left(U_1 + Q_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) + p_1 u_1 = m \left(U_2 + Q_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) + p_2 u_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Kombiniert mit Gl. (19) sind dies die verallgemeinerten Rankine-Hugoniot'schen Beziehungen zwischen den Anfangs- und Endwerten bei einem Stoß.

⁴ G. Ludford: The boundary layer nature of shock transition in a real fluid. Quart. appl. Math. (im Erscheinen).

In der Literatur der Stoßtheorie war es bisher das Ziel der Autoren zu beweisen, daß die Beziehungen (19) und (21) notwendige Bedingungen für die Existenz von Stößen sind und einige dieser Beweise, die sich auf die Navier-Stokesschen Gleichungen stützen, sind sicherlich korrekt. Was wir hier gezeigt haben ist, daß diese Bedingungen in einem bestimmten Sinn auch hinreichend sind: Wenn und nur wenn zwei Wertegruppen für u , p , ϱ , T existieren, die die Beziehungen (19) und (20) erfüllen, lassen die Navier-Stokesschen Gleichungen, ergänzt durch die in (16) angegebene spezialisierende Gleichung, ein asymptotisches Integral zu, welches einen kontinuierlichen Übergang von der ersten Wertegruppe zur zweiten innerhalb einer Entfernung von der Größenordnung $1/R$ vorsieht. Dieser Übergang hat die wesentliche Eigenschaft, daß etwa im adiabatischen Fall ($Q = 0$) die Entropie nach dem Übergang größer ist als vorher. Daher ist es nicht notwendig, zur Gl. (16) irgendeine Aussage hinzuzufügen, die aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik hergeleitet ist.

In dieser Begründung wird von der in der ersten und dritten Gl. (16) enthaltenen Annahme, daß der Zähigkeitskoeffizient ν und der Wärmeleitungskoeffizient k für jede einzelne Strömung Konstante sind, kein Gebrauch gemacht. Eine geringfügige Änderung von (16) würde auf den Fall, daß ν und k gegebene Funktionen von p und ϱ oder T sind, Bedacht nehmen. Diese Änderung würde die Resultate so lange nicht berühren, als die Prandtlsche Zahl P , die zu ν/k proportional ist, als beschränkt vorausgesetzt wird. Offen bleibt noch die Frage, ob das vollständige Weglassen entweder der Zähigkeits- oder der Wärmeleitungsglieder immer noch zu denselben Schlußfolgerungen führen würde. Die Antwort ist bejahend in beiden Fällen. Für eine Flüssigkeit mit Zähigkeit allein ($k = 0$) läßt Gl. (16) ein asymptotisches Integral von dem in Rede stehenden Typus zu, mit gegen Null gehendem ν , und im Fall $\nu = 0$ existiert eine asymptotische Lösung mit $k \rightarrow 0$. Die durch (19) und (21) ausgedrückten Bedingungen werden nicht beeinflusst. Der Übergangsbereich hat die Größenordnung ν im ersten und k im zweiten Fall.

6. Verallgemeinerungen.

Aus den letzten Bemerkungen ergibt sich eine weitere Frage, die aus verschiedenen Gründen von Interesse ist. Es ist klar, daß die Existenz von Integralen, welche Stoßdiskontinuitäten zeigen, durch die Zähigkeits- oder bzw. und Wärmeleitungsglieder bedingt ist. Man wird jedoch nicht annehmen, daß z. B. die spezielle Form der Navier-Stokesschen Gleichungen eine notwendige Bedingung für das Auftreten solcher Integrale ist. Daher können wir fragen: Wie können die Gleichungen in vernünftiger Weise verallgemeinert werden, so daß sie noch zu Stoßphänomenen führen?

Bezüglich der Ausdrücke für Wärmeleitung dürfte außer dem bereits über eine Veränderlichkeit der Koeffizienten k Gesagten keine weitere Verallgemeinerung von Interesse sein, zumindest solange wir uns auf isotrope Flüssigkeiten beschränken. Der Wärmefluß muß wohl proportional $\text{grad } T$ und daher der Wärmeaustausch in der Form $\text{div } (k \text{ grad } T)$ angesetzt werden, wobei k von allen Veränderlichen ν , p , ϱ , T abhängen kann. Dann würde sich, wie früher erwähnt, gegenüber dem Fall $k = \text{konst.}$ nichts ändern. Falls man es annehmbar findet, daß der Wärmefluß eine allgemeinere Funktion von $\text{grad } T$ ist, so wäre die einzige wesentliche Bedingung, um den Effekt zu erhalten, daß diese Funktion für $\text{grad } T = 0$ verschwindet und in diesem Punkt umkehrbar ist.

Interessanter ist es, festzustellen, welche Annahmen für die Zähigkeit zugelassen werden dürfen. Wir setzen von vornherein voraus, daß der symmetrische Tensor der Zähigkeitsspannungen eine Funktion des symmetrischen Deformationstensors $\text{def } \mathbf{v}$ ist. Wenn in üblicher Weise die Spannungskomponenten mit $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$ und die Komponenten von $\text{def } \mathbf{v}$ mit

$$\varepsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \dots, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \dots \quad (22)$$

bezeichnet werden, kann durch Annahme von zwei Gruppen von Funktionen φ und ψ eine allgemeine Beziehung zwischen den beiden Tensoren ausgedrückt werden:

$$\sigma_x = \varphi_x(\varepsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots), \quad \tau_{xy} = \psi_{xy}(\varepsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots).$$

Natürlich sind die sechs Funktionen φ und ψ nicht unabhängig; sie müssen die Invarianzbedingungen befriedigen, um den Tensorcharakter der Beziehung zu wahren. In erster Linie ist hier an isotrope Flüssigkeiten gedacht.

Nun finden wir beim Studium der einzelnen Schritte, die zu den vorhergehenden Schlüssen geführt haben, daß die folgenden Einschränkungen für die φ und ψ zur Sicherstellung der Ergebnisse hinreichen. Erstens muß jede der Funktionen ψ_{xy} verschwinden, wenn das betreffende $\gamma_{xy} = 0$ ist, was dasselbe bedeutet, wie daß die zwei Tensoren σ , τ und ε , γ zusammenfallende Hauptrichtungen haben. Zweitens muß jede der Funktionen φ_x , φ_y , φ_z Null werden, wenn die drei Komponenten ε_x , ε_y , ε_z der Dehnung gleichzeitig verschwinden. Außerdem haben wir anzunehmen, daß die Gleichung $\sigma_x = \varphi_x(\varepsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots)$ eindeutig nach ε_x gelöst werden kann, wenn alle ε , γ außer ε_x verschwinden. Diese Bedingungen sind hinreichend zur Ableitung von Stoßbeziehungen von im wesentlichen der gleichen Art wie früher und um die Existenz von entsprechenden Integralen zu beweisen, sobald die Stoßbeziehungen befriedigt sind. Wenn man jedoch zu beweisen wünscht, daß die Stoßübergänge nur in einem Sinne wirken (unter Entropiezunahme im adiabatischen Fall), muß man die Bedingung hinzufügen, daß das Skalarprodukt der beiden Tensoren positiv ist. — Ein Beispiel eines solchen verallgemeinerten Zähigkeitsgesetzes wurde gelegentlich von J. v. Neumann⁵ für eindimensionale Strömungen in der Form $\sigma_x = \text{konst.} \cdot |\varepsilon_x| \cdot \varepsilon_x$ eingeführt. Hermann Weyl⁶ hat kürzlich eine Verallgemeinerung des Stoßproblems in anderer Richtung studiert, indem er die Zähigkeits- und Wärmeleitungsgesetze in der üblichen Form beibehält, aber allgemeinere Zustandsgleichungen zuläßt.

Noch eine Bemerkung zum Schluß: Ich möchte nicht den Eindruck erwecken, daß ich das mathematische Problem, zu dem das Auftreten von Stoßfronten führt, als gelöst betrachte. Ich habe gezeigt, daß unter bestimmten notwendigen und hinreichenden Bedingungen Integrale existieren, die in der Nachbarschaft einer Fläche den Typus aufweisen, den wir für eine Stoßfront annehmen müssen. Die Randbedingungen wurden jedoch nicht in Betracht gezogen. Das vollständige Problem besteht in der Ableitung von Integralen, die vernünftige Randbedingungen erfüllen, sich in der Nähe einer Stoßfront, wie oben gezeigt, verhalten und sich außerhalb der Stoßfront asymptotisch mit $R \rightarrow \infty$ der Strömungsform einer idealen Flüssigkeit nähern. Die analoge Frage ist im Falle der gewöhnlichen Grenzschicht bisher nur für zwei ganz spezielle zweidimensionale Strömungen gelöst worden, nämlich für die Strömung in einem geraden konvergenten Rohr und die in einem spiralförmigen Rohre. Erst in den allerletzten Jahren ist die Aufmerksamkeit der Mathematiker darauf gelenkt worden, daß hier ein weites Untersuchungsgebiet vorliegt, in dem Studium von Differentialgleichungen, deren Glieder höchster Ordnung kleine, in der Grenze verschwindende Koeffizienten besitzen. Es scheint jedoch noch zu früh, zu versuchen, diese Art von Überlegungen auf den besonders komplizierten Fall von Stoßfronten anzuwenden.

⁵ J. v. Neumann und R. D. Richtmyer: A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. *J. appl. Physics* **21**, 232—237 (1950).

⁶ H. Weyl: Shock waves in arbitrary fluids. *Communications in Appl. Math.* **2**, 103—122 (1949).

Turbulence and Silt-Load in Water Channels.

By E. G. Richardson.

King's College, Newcastle-on-Tyne, England.

With 8 figures.

Summary. The relation between the theoretical ideas of turbulent eddy-diffusion, and conditions in a water-channel are discussed, in particular, the correlation between the flow at different points in the stream. In addition, the application of these principles to the distribution of silt in a turbulent river is discussed, and practical measurements adduced in support of the theories.

Résumé. Cet article discute les conditions d'écoulement dans un canal au point de vue des idées théoriques sur la diffusion turbulente des tourbillons, en considérant particulièrement la corrélation qui existe entre divers points de l'écoulement. De plus, ces idées sont appliquées au problème du transport de bourbe dans un fleuve, et des résultats de mesure sont cités pour soutenir la théorie.

Zusammenfassung. Die Strömungsverhältnisse in einem Flüssigkeitskanal werden im Zusammenhang mit theoretischen Vorstellungen über die turbulente Wirbeldiffusion erörtert, unter besonderer Beachtung der Korrelation zwischen der Strömung in verschiedenen Punkten des Stromes. Diese Anschauungen werden ferner auf das Problem der Schlammverteilung in einem turbulent strömenden Fluß angewandt und werden gestützt durch die Ergebnisse angeführter praktischer Messungen.

Theoretical Aspects.

In the modern theories of turbulence two parameters play an important part; (1) the "intensity" of turbulence defined as u'/U , with U the mean flow and u' the root mean square of fluctuation in flow at any point, and (2) the "scale" of turbulence λ , defined as the distance over which the correlation between individual motions falls to zero; λ may also be called the "mean eddy diameter" since the correlation coefficient between motions at two points will be near unity if their distance apart is small compared to the mean eddy size, and per contra.

In defining intensity of turbulence we have introduced the quantity u to mean the fluctuation parallel to the direction of flow, but there will be also fluctuations v and w perpendicular to this direction. It is the second of these, in the vertical plane, that is pertinent to silt transport, since this component may uphold the solid material in suspension. In isotropic turbulence $u = v = w$ but in any case they will be of the same order, except very close to a boundary.

For values of distance x downstream large enough to make the correlation coefficient zero, the mean vertical distance \bar{Y} which a particle has travelled from its origin ($x = 0$, $y = 0$) is given by

$$\frac{\partial \bar{Y}^2}{\partial x} = 2 \bar{v}^2 x / U^2. \quad (1)$$

Writing

$$\frac{U}{2} \left(\frac{\partial \bar{Y}^2}{\partial x} \right) = \bar{v}^2 x / U = \bar{v}^2 t, \quad (2)$$

t being the time for the particle to cover the distance x downstream, we see that quantities in eqn. (2) have the dimensions of a diffusion or kinematic viscosity coefficient. It is usually known as the eddy-viscosity or eddy-diffusion coefficient and written ν' . In all respects except for the general drift downstream the vertical transport of particles may be regarded as similar to that in molecular diffusion. The eddy-diffusion coefficient is, however, much greater than the molecular one and may vary from level to level in the stream.

If we regard the distance x over which (1) and (2) are operative as being equal to λ , we have

$$\frac{\overline{v^2}}{U} = \frac{\nu'}{\lambda}. \quad (3)$$

If ν' is constant, (2) indicates that $\overline{Y^2} \propto x$ (again for $x > \lambda$).

When silt is introduced into the stream, conditions of equilibrium require that its concentration c shall be related to its sinking velocity V by

$$\nu' \frac{\partial c}{\partial y} + c V = 0. \quad (4)$$

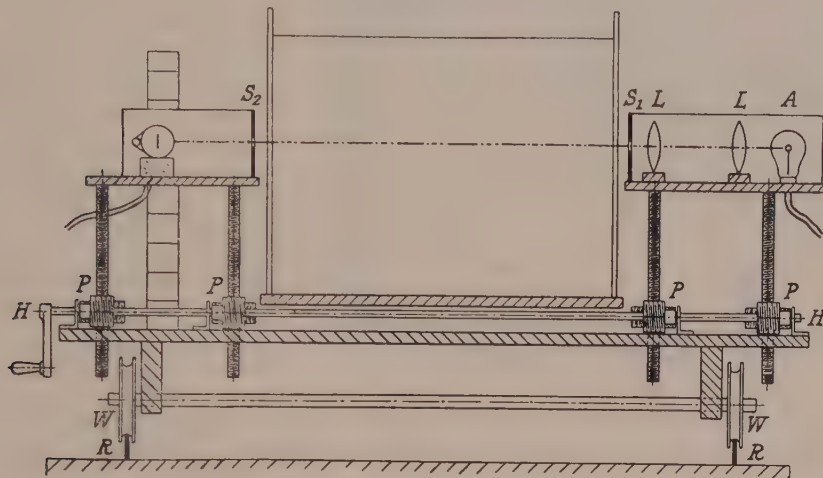


Fig. 1. Apparatus for Studying Silt Concentration in a Water Channel.

Prandtl¹ also O'Brien² relate the mean fluctuations u and v to the friction between neighbouring strata of fluid or to $l \partial U / \partial y$ in which l is the "mixing length" or mean free path of a disturbance in the stream before it mixes into the surrounding fluid. So to the extent that the same coefficients are involved in the transport of momentum and silt, measurements of velocity gradient transverse to the flow and of silt concentration can be used to determine how the "mixing length" l varies across the section.

The latter factor is related to the coefficient of eddy-viscosity by the relation

$$\nu' = v l. \quad (5)$$

Turbulent Diffusion Measurements.

The general principle of diffusion measurements involves the introduction of some form of energy or material at a "source", which may be a point, line or plane, and the study of its subsequent distribution in the fluid. The author³ has used dyes and Kalinske and Pien⁴ benzene for this purpose in water channels (Fig. 1). Schubauer⁵ earlier had used a hot-source (heated wire) in a wind tunnel and Sutton⁶ has made extensive studies of smoke introduced from a point into the atmosphere. The equation

¹ L. Prandtl: Z. angew. Math. Mechan. **5**, 137 (1925).

² M. O'Brien: Trans. Amer. geophysic. Union (1933).

³ E. G. Richardson: Proc. physic. Soc. **49**, 479 (1937).

⁴ A. A. Kalinske and C. L. Pien: Ind. Engng. Chem. **36**, 220 (1944).

⁵ G. B. Schubauer: N. A. C. A. Rep. 524 (1935).

⁶ O. G. Sutton: Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A **146**, 701 (1934).

for the distributed concentration from a point source of (maintained) strength Q/t in isotropic turbulence (u and v' constant) is;

$$c = \frac{Q}{4\pi v' r t} \exp. \left[-\frac{\overline{u^2} (y^2 + z^2)}{4 v' r} \right] \quad (6)$$

and from a line source;

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} \int \exp. -\frac{y^2}{2 \overline{Y^2}} \partial(y/\sqrt{2 \overline{Y}}). \quad (7)$$

The latter form is more amenable to experiment since a wire may be coated with a dye, then with a soluble gum, and placed athwart the water-channel to act as source. After the gum has dissolved away, the dye maintains a saturated solution in the vicinity of the wire until it is all used up. The optical density c of the colour along lines parallel to the source at various locations downstream is measured by a beam of light cast athwart the channel. The eddy-diffusion constant is then estimated

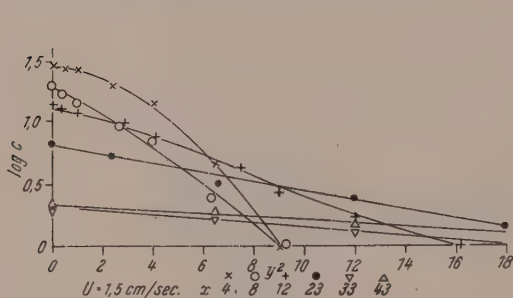


Fig. 2a. Variation of Dye Concentration (c) with Height (y).

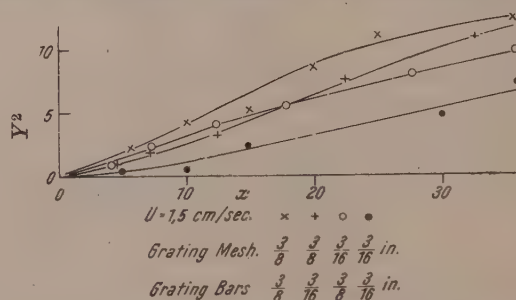


Fig. 2b. Decay of Turbulence due to Gratings. Variation of Y^2 with x .

by plotting $\log c$ against y^2 for different values of x , that is, of t , as the dye diffuses. Measurement of the slopes of these lines gives one a measure of v/U [by eqn. (1)]. Typical results with the turbulence induced by grids in the channel are shown in Fig. 2, the intensity of turbulence v , decaying as the fluid recedes from the grids.

Analyses of the distribution in both these and in Kalinske and Pien's experiments showed that, provided the slope of the channel and positions of the entry and exit weirs were adjusted to produce uniform flow (U constant over the section), the turbulence was isotropic except near the boundaries and source and the distribution of injected matter fulfilled the equations (7) and (6) respectively, in the two sets of measurements. This means that the distribution across a section downstream of the source followed the normal error curve of Gauss.

The value of $\frac{v}{U}$ in a water channel is of the order 0.1, similar in value to that of air in the atmosphere.

In an actual canal, as in the atmosphere near the ground, the turbulence is anisotropic for the component velocity fluctuations— $v < w$ and $v < u$ —near the bed. Calculation of v' is then more difficult but not impossible.

Measurement of Correlations in Water Flow.

The scale factor λ , as already remarked, is allied to the mean eddy size and also to the correlation between the relative phase Θ of motions taking place at A and B .

If a series of very regular eddies passed over the observation points so that a sinusoidal fluctuation of velocity took place at A and B the correlation coefficient would be the "power factor" $\cos \Theta$. Otherwise we can place two hot-wire flow meters or two coloured jets in the line of two transverse beams of light at stations A and B

in the flow and compare on an oscillograph the fluctuations in hot-wire resistance or optical density, respectively. The author, also Kalinske, have used the optical method. Fig. 3 shows two nearby jets of dye photographed together to show the extent to which the motions are similar, while Fig. 4 shows an oscillograph display of the potentials across two hot-wires in a water channel (a) with the wires close together (b) with the wires 10 cm apart downstream.

The measurement of the actual coefficient of correlation may be done as Taylor⁷ first did by taking the electric currents (direct or photo-electric) from the recording devices at A and B to an electro-dynamometer or electronic valve circuit so as to obtain the product $u_A u_B$ as well as the r. m. s. individual fluctuations u_A' and u_B' , averaged over the same interval of time; then

$$R = \frac{\overline{u_A u_B}}{\overline{u_A'} \cdot \overline{u_B'}} \quad (8)$$

The scale of turbulence λ may then be defined (in somewhat arbitrary fashion) as the distance over which R falls from 1 (A and B coincident) to 0.1. In the author's channel, running at a Reynolds number of 10^4 , λ is of the order 10 cm (see fig. 5).

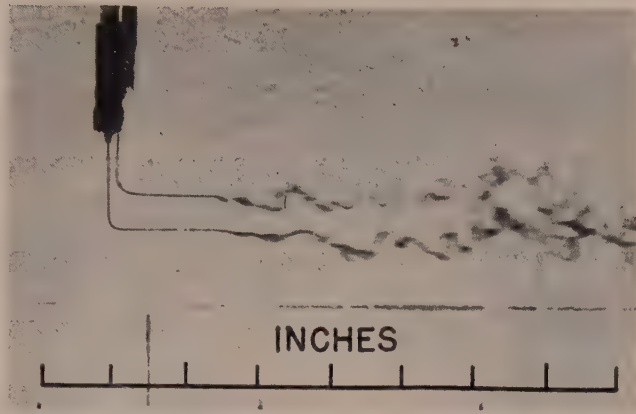


Fig. 3. Correlation Between Dye Injections in Water Channel (Kalinske).

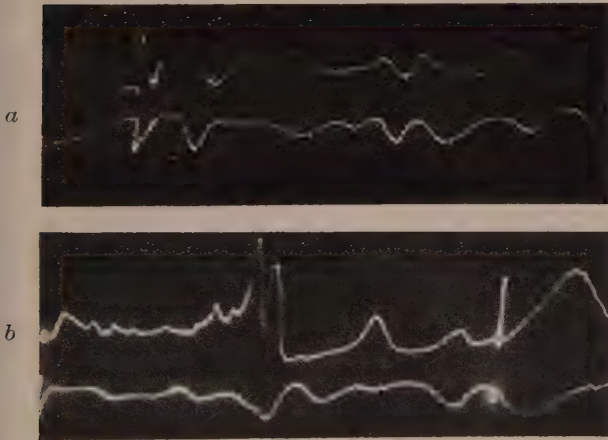


Fig. 4. Correlations Between Hot-Wire Resistance Fluctuations.

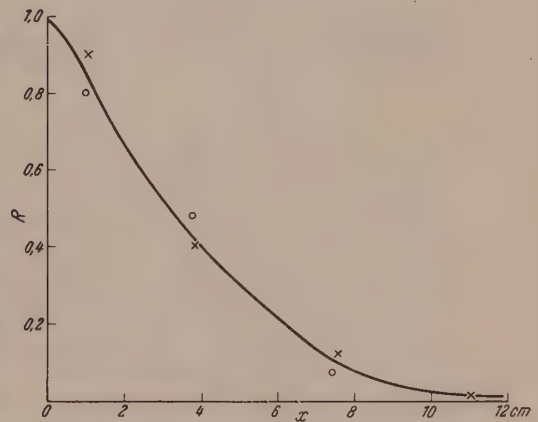


Fig. 5. Variation of Correlation Coefficient with Distance Downstream.

By equation (3) this makes $\nu' = 0.25 \text{ cm}^2/\text{sec}$. (The molecular diffusion coefficient for this dye in still water is $10^{-5} \text{ cm}^2/\text{sec}$. and so is obviously negligible.) Measuring the corresponding slope of fig. 2 and using the eqn. (2) gives $\nu' = 0.3 \text{ cm}^2/\text{sec}$. Kalinske⁸ at $Re \approx 10^5$ found values of order $\lambda = 15 \text{ cm}$, $\nu/U = 0.1$, $\nu' = 8 \text{ cm}^2/\text{sec}$.

⁷ Sir Geoffrey Taylor: Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A **151**, 444 (1935).

⁸ A. A. Kalinske (and E. R. van Driest): Trans. Amer. Soc. Civil Eng. **105**, 1547 (1940).

from his diffusion experiments; Sheppard⁹ in the atmosphere near the ground $v' = 5 \text{ cm}^2/\text{sec}$.

It is of course possible to measure u (or v) directly at points in the stream as Macovsky¹⁰ has done in a water channel by recording the fluctuations (suitably amplified) in the resistance of an immersed hot-wire.

Measurement of Silt Concentration.

The usual method of measuring silt is to take samples out of the stream at various stations and different levels and to submit them to weighing — and also to analysis of particle size distribution. Fig. 6 is a photograph of the apparatus used by the author for this purpose, based on the absorption suffered by a narrow beam of light passing through a glass cell about 10 cm. high containing a small quantity of the silt dispersed in water. As long as particles larger than about 3 microns are concerned the absorption

is proportional to the total area presented by the particles. As the latter are allowed to settle freely in the water the light passing through the suspension can be recorded by the photo-electric current from the selenium oxide cell

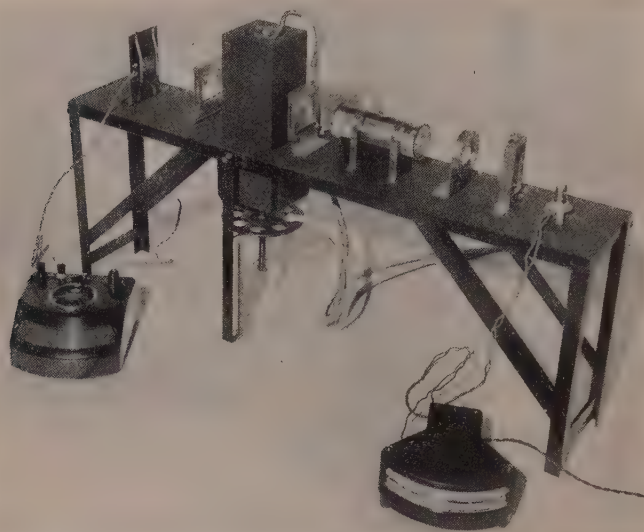


Fig. 6. Apparatus for Particle Size Distribution.

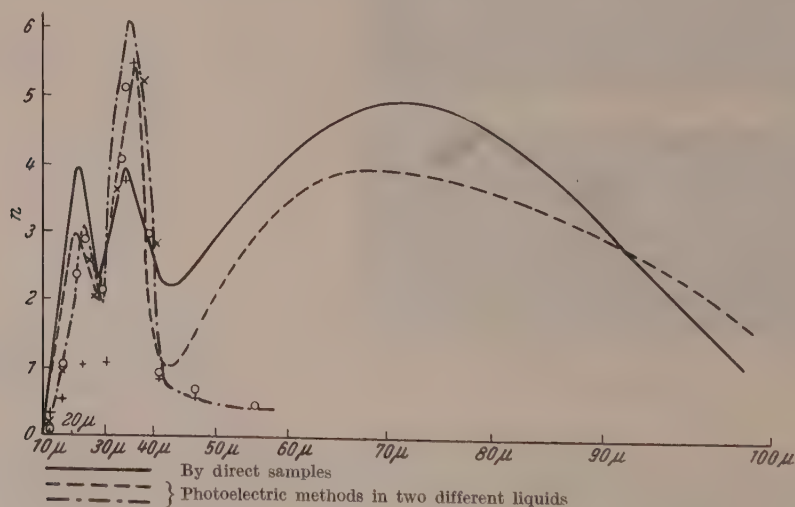


Fig. 7. Typical Particle Size Distribution for River Silt.

⁹ P. A. Sheppard: Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 188, 268 (1947).

¹⁰ M. S. Macovsky: U. S. Navy. Taylor Model Basin. Rep. 670 (1950).

on the left of the photograph. The rate of change of the current at any instant is in fact proportional to the number and surface area of those particles which are falling through the light beam at that instant. Since this particular size can be related to the depth of the sampling light beam below the free surface of the water in the glass cell and the time since sedimentation started by Stokes' law, it is possible from the record of photo-electric current to get the summation curve of the suspension in a form like that of Fig. 7, for samples taken out of an English River; numbers of particles plotted against size in microns.

Although in a real river the silt will have a size distribution distributed in this way about a mean size, it is better in order to be rid of one variable in laboratory experiments to use a graded sand which by pre-treatment (through sieving or sedimentation) is confined to a narrow band of size distributed about a known mean, e.g. 0.3 mm. with a standard deviation of 0.01 mm.

With such a graded sand as bed the author employed the photo-electric estimation of particle number at different levels and stations along a tank of running water, precisely as indicated in Fig. 1. In such an artificial channel beside measurements of silt concentration c , the mean velocity U at different heights y may be measured. With the aid of equations (1) to (4) it is then possible to calculate the eddy diffusion coefficient and exhibit its relation to U . For instance, Fig. 8 shows these relationships for a bed of sand with mean diameter 0.3 mm, showing that the trend of U closely follows that of ν' , both assuming a nearly constant value in midstream. Making use of the velocity

gradient, we can also find how the mixing length l varies with depth, since $\nu' = l^2 dU/dy$, the value of ν' being derived from the silt load by eqn. (4).

This assumes, of course, that the same eddy-diffusion coefficient is involved in the two cases, momentum transport and silt transport, but the justification is found when one plots logarithmically l (so derived) against y and gets the same straight line for three different sizes of sand (except at the extreme end of the curve), Fig. 8.

Eddy-diffusion theories do not, as Hunter Rouse¹¹ points out, explain how solid material, usually of greater density than the surrounding fluid can be brought into suspension but it is only necessary, as Jeffreys¹² and Tison¹³ have shown, for some water to undermine the bed so that a particle is bathed by a faster flow above than below it, for a lifting (Magnus) force to act on it. The ripples in the sand under water which usually form when erosion commences have their origin, according to Tison¹⁴, in pulsating movements in the flow. Bagnold¹⁵ has made some careful model experiments on the effect of pulsating movements of water in a model canal on the sandy bed and found some empirical parameters which determine the critical velocity

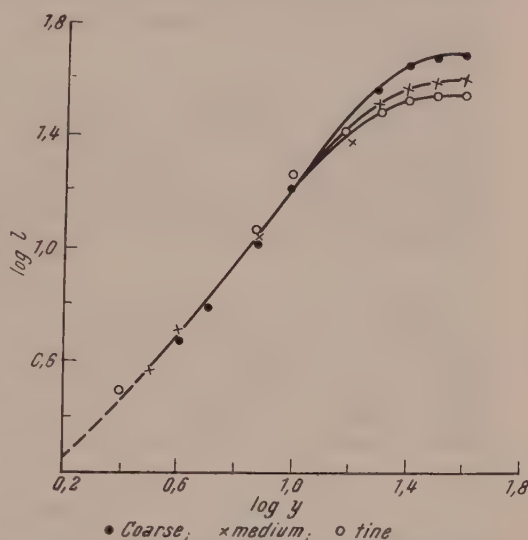


Fig. 8. Variation of Mixing-length with Height (derived from Silt Distribution).

¹¹ H. Rouse: Trans. Amer. Soc. Civil Engr. (1939).

¹² H. Jeffreys: Proc. Cambridge philos. Soc. **25**, 272 (1929).

¹³ L. J. Tison: Ann. Soc. sci. Bruxelles **58**, 225 (1938).

¹⁴ L. J. Tison: Ann. Soc. sci. Bruxelles **59**, 41 (1939).

¹⁵ R. A. Bagnold: Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A **187**, 1 (1946).

for ripple marks to appear and their wave-length when formed. Once the bed has been deformed in this way, it is easy for the concentration of silt near the bed to be maintained under the action of the jumping motion ("saltation") of particles from ridge to ridge.

It appears therefore that one may safely apply these theoretical ideas of turbulent diffusion to silt transport problems.

Silt Transport in Practice.

When we seek to apply these theories and laboratory measurements in practice, we are faced with the difficulty that so many data must be collected in the field before an adequate estimate of the run-off and silt load of a catchment area can be estimated, even approximately.

There is no doubt, however, about the existence of harassing problems for the water or harbour engineer. The spectacular and dangerous erosion which takes place on the American and African Continents is well-known. In Europe, although erosive conditions are not so extreme, because the ground has not been overcropped, yet it still behoves the hydraulic engineer to make measurements of run-off and silt removal for the area with which he is concerned and to endeavour to reduce the loss to a minimum.

In several stations in the United States the soil conservation service maintains experimental projects for this work, in which the run-off is correlated with retained soil moisture and with the amount of silt carried in the water that reaches the bottom of the slope. At this point a low wall resting on a metal sill runs right across the plot and diverts all the water into a large tank. Part of this water overflows into a "diviser" formed of an odd number of vertical slots of equal area, of which only the silt in the central slot is collected in a circular tank, where it eventually settles and can be weighed. The object of the first tank is to catch the heavy particles of grit and sand leaving the finer and more valuable—from the agriculturists point of view—silt with its intermixed colloidal material. Moisture meters consist of cups of clay embedded in the field in which the pressure is changed as the water absorbed or given up by the soil changes.

It has been pointed out by Prothero¹⁶ recently that such collecting stations might well be set up in Britain and the European Continent in connection with the many water storage and hydro-electric schemes now in operation. Unless some afforestation of the catchment areas is secured, water running into the reservoirs will carry with it much of the surface soil and slowly but surely reduce the capacity of the reservoirs, or—if it is not so trapped—will silt up harbours and estuaries.

Some attempts to measure optically the silt load carried by a river from time to time have been made by the author on the River Tyne in England and by Hurst on the River Nile in Egypt but have not been continued. Another project considered in Egypt is the coagulation of the fine and valuable silt carried in suspension in the irrigation channels of the Nile Delta to form clusters large enough to sink to the bottom of these slow-moving shallow streams and not be carried off the farming land into the main river. To produce the coagulation ultrasonic vibration has been proposed but even if the coagulating effect of ultrasonics were not at the same time associated with a disruptive effect, it seems likely that the cost of treatment of large quantities of silt-carrying fluid with ultrasonics would be prohibitive.

¹⁶ R. M. Prothero: *Nature* (London) 168, 27 (1951).

(Eingegangen am 25. September 1951.)

Drehzahlmessung, Geschwindigkeitsmessung und Durchflußmessung mit Hilfe unipolarer Induktion¹.

Von H. Hinteregger.

Physikalisches Institut der Technischen Hochschule Wien.

Mit 8 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Unipolarinduktion als historisch bedingter Ausdruck für stationäre Induktion durch Bewegung. Systematik der Grundeffekte, die hier als Unipolarinduktion bezeichnet werden. Diskussion für zeitlich veränderliche Bewegung. Meßspannung bei Auftreten von Wirbelströmen. Kritik des Tachometers von Benfield und die Erreichung wesentlich günstigerer Ergebnisse durch systematische Ausnützung der stationären Induktion. Erweiterungsmöglichkeit des „electromagnetic flowmeter“ von Kolin zu einem hydrodynamischen Untersuchungsgerät.

Summary. Unipolar induction is explained as stationary induction by movement. A systematic treatment of the basic effects of unipolar induction is given. Movements which are variable with time are discussed. The measuring voltage as influenced by eddy currents is determined. Benfield's tachometer is critically reviewed, and more efficient devices (which are found by applying systematically the principle of stationary induction) are described. Possibilities are shown for developing Kolin's "electromagnetic flowmeter" so that it will become a measuring device for hydrodynamical research.

Résumé. L'induction unipolaire est expliquée comme induction stationnaire causée par un mouvement. L'auteur considère le système des effets fondamentaux de l'induction unipolaire, et il les discute au cas d'un mouvement non stationnaire. Alors, il détermine la tension de mesure en considérant les courants de Foucault. Le tachymètre de Benfield est examiné critiquement et des appareils plus efficaces, utilisant systématiquement l'induction stationnaire, sont décrites. Enfin, l'auteur montre qu'on peut développer, et appliquer aux recherches hydrodynamiques, l'«electromagnetic flowmeter», de Kolin.

A. Systematik der Grundeffekte.

Die Bezeichnung „unipolare Induktion“ bedeutete ursprünglich, daß diese Art der Induktion auch durch einen isolierten unipolaren Magnetpol hervorgerufen werden könnte. Bei der elektrotechnischen Anwendung in der sogenannten Unipolarmaschine will man mit diesem Wort wohl hauptsächlich andeuten, daß es sich nicht um die Gleichrichtung einer Wechselspannung, sondern um die direkte, das heißt kommutatorlose Erzeugung einer Gleichspannung handelt (vgl. Fußnote 1, S. 93).

Im folgenden soll unter unipolarer Induktion allgemein die Entstehung elektrischer Felder und elektrischer Ströme zufolge beliebiger, stationärer Bewegung von Leitermaterie durch ein zeitlich konstantes Magnetfeld verstanden werden. Die elektrische Feld- und Stromverteilung der Unipolarinduktion stellt sich auch in schlechteren Leitern so rasch ein, daß im Maßstab dieser äußerst kurzen Einstellzeit fast jede praktisch vorkommende Materiebewegung als äußerst langsam veränderlich angesehen werden darf. Aus diesem Grunde kann man auch bei zeitlich veränderlicher Bewegung den entstehenden Effekt einfach als Aufeinanderfolge stationärer Unipolarinduktionszustände auffassen².

Die Möglichkeiten, Unipolarinduktionseffekte wirklich zu erzeugen, sind überaus vielfältig, wie die folgende Systematik, auf deren Kennzahlen später Bezug genommen werden wird, zeigen möge.

¹ Die Bezeichnung „unipolare“ Induktion wurde nur beibehalten, um eine Neubenennung zu vermeiden, obwohl eine andere Benennung, z. B. „isopolare“ Induktion oder „stationäre Bewegungsinduktion“ sicher sinnvoller wäre.

² Ist nicht die Bewegung, sondern das Magnetfeld zeitlich veränderlich (für den Laboratoriumsraum), dann ist das induzierte elektrische Feld kein Potentialfeld mehr (z. B. bei Abb. 3); man kann diese Effektgruppe überhaupt nicht als „stationäre Induktion“ einreihen, wenn man sich auf das ruhende Laboratorium bezieht.

Die primäre Erzeugung des Magnetfeldes kann erfolgen durch

I. eine permanente Magnetisierung der bewegten Leitermaterie selbst (vgl. z. B. Abb. 1),

II. ein außerhalb der untersuchten Leitermaterie befindliches magnetisches Erregersystem (Permanentmagnete oder Stromwicklungen), z. B. nach Abb. 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Die Bewegung der Leitermaterie kann sein:

1. Translation als starrer Körper (z. B. Abb. 6),
 2. Rotation als starrer Körper (z. B. Abb. 1, 2, 3),
 3. allgemeine stationäre Bewegung (z. B. laminare oder turbulente Strömung leitender Flüssigkeiten) (z. B. Abb. 7), wobei die Leitermaterie (zumindest im Fall II) sowohl

4. nicht magnetisierbar (z. B. Abb. 2 oder 6) als auch
 5. magnetisierbar sein kann. Außerdem kann das magnetische Erregersystem
 6. im Laboratorium ruhen (z. B. Abb. 2, 6, 7),
 7. im Falle der Translation oder Rotation der untersuchten Leitermaterie an dieser Translation oder Rotation als starrer Körper teilnehmen (z. B. Abb. 3a),
 8. sich selbst unabhängig von der Bewegung der untersuchten Leitermaterie bewegen.

Je nach dem Symmetriecharakter von Geschwindigkeits- und Magnetfeldverteilung kann es in fast allen Fällen der obigen Kennzeichnung zu einem

a) stromfreien oder

b) wirbelstrombehafteten Induktionseffekt kommen. Wir werden daher a, b zu den Kennziffern I, II, 1 bis 8 hinzunehmen.

Wirbelströme sind nicht nur für das Auftreten von Bremskräften und Bremsmomenten entscheidend, sondern sie verzerren auch das elektrische Feld.

Während im stromfreien Fall (a) die Meßspannung zwischen zwei Schleifkontaktstellen A und B einfach gleich

$$U_{AB} = \int_A^B [\mathbf{v} \mathbf{B}] d\mathbf{s} \quad (\text{a})$$

ist, kann die zwischen A B tatsächlich gemessene Spannung beim Auftreten von Wirbelströmen

$$U_{AB} = \int_A^B \left([\mathbf{v} \mathbf{B}] - \frac{1}{\sigma} \mathbf{i} \right) d\mathbf{s}$$

(\mathbf{i} = Stromdichte, σ = elektrische Leitfähigkeit) recht erheblich von dem (auch aus der bloßen Anwendung des Induktionsgesetzes erhaltenen) nach Formel (a) errechneten Wert abweichen. Näheres über die physikalische Erklärung und Gültigkeit der obigen Formeln ist im Anhang zu finden; hier möge nur herausgestellt werden, daß das entstehende elektrische Feld auf jeden Fall ein Potentialfeld ist, so daß im Integral für die Meßspannung auch bei Anwesenheit von Wirbelströmen der Integrationsweg beliebig gewählt werden kann. Für die Berechnung spezieller Fälle der Gruppe b ist die Lösung entsprechender Randwertprobleme erforderlich.

Bisher wurde nur von den Feldern und Strömen der Bewegungsinduktion, nicht aber vom Einfluß jener Ströme gesprochen, die im bewegten Leiterkörper zufolge etwaiger Messung mit einem stromverbrauchenden Meßgerät fließen. Für die meßtechnische Anwendung ist die Diskussion dieses Einflusses natürlich von großer Bedeutung.

Wenn die bewegte Materie (Festkörper oder Flüssigkeit) ein metallischer Leiter ist, dann stört der Stromverbrauch der Spannungsmessung (auch bei Parallelschaltung

mehrerer Meßgeräte) im allgemeinen die induzierten Potentialfelder und Ströme so wenig, daß die obigen, eigentlich für elektrostatische Messung abgeleiteten Formeln auch jetzt noch durchaus gültig bleiben. Solche Unipolarinduktionsanordnungen stellen eben eine äußerst niederohmige Spannungsquelle dar, so daß die angeschlossenen Meßgeräte eine durchaus vernachlässigbare „Belastung“ dieses „Generators“ darstellen.

Für schwach elektrolytisch leitfähige Flüssigkeiten gilt das soeben Gesagte natürlich nicht mehr, insbesondere dann, wenn die Kontaktelektroden ziemlich punktförmig ausgeführt werden. In diesem Falle muß der Meßkreis möglichst hochohmig ausgeführt werden und außerdem muß man polarisationsfreie Elektroden³ verwenden, da sonst der induzierten Spannung (unterhalb der Zersetzungsspannung) durch die Polarisationsspannung das Gleichgewicht gehalten wird und der äußere Meßkreis überhaupt spannungsfrei bleibt (oder zumindest unbrauchbare und veränderliche Spannungen erhält).

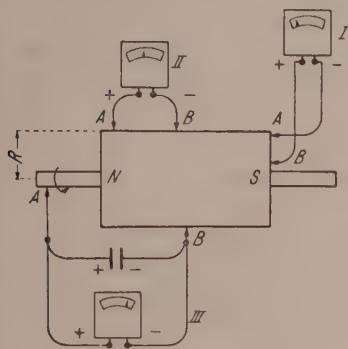


Abb. 1.

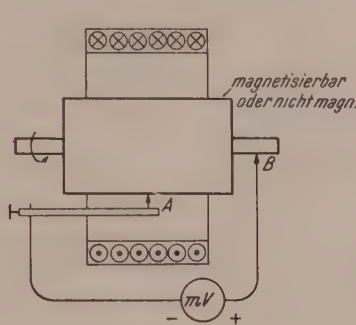


Abb. 2.

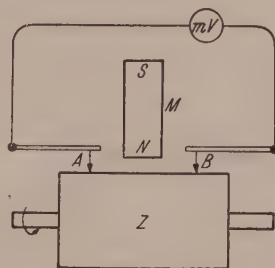


Abb. 3.

Abb. 1. Permanentmagnet rotiert um Symmetrieachse der Magnetisierung. A und B sind Schleifkontakte eines im Laboratorium ruhenden Meßkreises.

Abb. 2. Ein magnetisierbarer oder nicht magnetisierbarer leitender Drehkörper wird in einem von außen durch ruhende oder mitgedrehte Erregerwicklungen erzeugten stationären Magnetfeld gedreht. A und B sind Schleifkontakte eines ruhenden Meßkreises.

Abb. 3. Ein nicht magnetisierbarer Leiterzylinder Z wird gemeinsam mit dem starr verbundenen Magneten M gedreht. A, B sind Schleifkontakte des ruhenden Meßkreises (nach Benfield).

B. Tachometer.

Die Anwendung der Unipolarinduktion zur Drehzahlmessung kann in einfachster Weise etwa nach dem Prinzip der Abb. 1 erfolgen: ein kleiner, zylindrischer Permanentmagnet rotiert um seine Achse und zwei Schleifkontakte A, B führen zu einem geeigneten Spannungsmeßgerät (Millivoltmeter, Mikroampèremeter, Galvanometer), dessen Stromverbrauch praktisch keine Rolle spielt (vgl. A). Die Meßspannung bei der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi f$ beträgt

$$U_{AB} = f \cdot \Phi_{AB}^4.$$

Φ_{AB} bedeutet hierbei den magnetischen Fluß durch die Drehfläche, die entsteht, wenn die Verbindungslinie A A' B um die Drehachse rotiert (A' entsteht, wenn A radial bis zur gleichen Entfernung von der Drehachse wie B verschoben wird). Diese Spannung, die der Drehzahl genau linear proportional ist und keine Welligkeit enthält (Rotationssymmetrie der Magnetisierung vorausgesetzt), ist dann am größten, wenn ein Kontakt auf der Drehachse und der zweite am Umfang in der mittleren Zone

³ Vgl. z. B. Kolin (l. c.).

⁴ Dieses einfache Resultat folgt unmittelbar aus D, Gl. (2), die bereits als (a) auf S. 94 vorweggenommen wurde.

gewählt wird (vgl. Abb. 1, III), da dann Φ_{AB} praktisch den vollen Maximalfluß des Magneten bedeutet⁵.

Für die experimentelle Anwendung sei darauf hingewiesen:

daß die Verbindungsleitungen von A , B zum Meßgerät vollkommen beliebig geführt werden können, da ihre Verlegung keinen Einfluß auf die Meßspannung besitzt,

daß der Magnet ohne weiteres in einer Hülse aus besser bearbeitbarem und für die Kontaktgabe günstigerem Material gefaßt werden darf (wobei es für die Vermeidung etwaiger Thermospannungen am günstigsten ist, alle schleifenden Teile aus dem gleichen Material herzustellen),

daß die Kupplung der untersuchten Welle an den Magneten sowohl isolierend (z. B. durch einen kurzen, festen Gummischlauch) als auch metallisch leitend ausgeführt werden kann, ohne daß hiedurch der Umrechnungsfaktor zwischen Meßspannung und Drehzahl geändert würde,

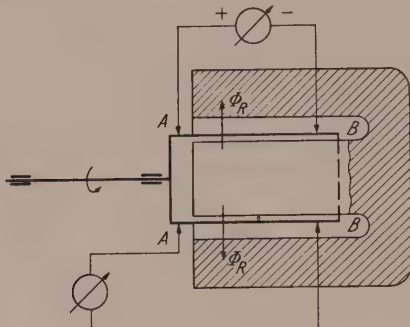


Abb. 4a.

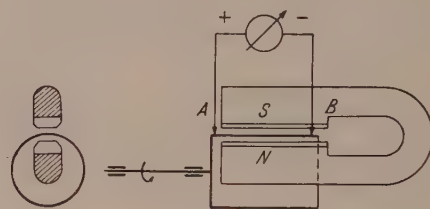


Abb. 4b.

Abb. 4a. Leiterzylinder rotiert im Luftspalt eines Topfmagneten. Das Material des Zylinders kann sowohl magnetisierbar als auch nicht magnetisierbar sein. A , B Schleifkontakte.

Abb. 4b. Variante zu Abb. 4a, wobei das Magnetfeld auf das Gebiet der Schleifkontakte beschränkt ist. Zur Unterdrückung von Wirbelströmen und Steigerung der Spannungsausbeute bei Drehzahlmessung ist Lamellierung (in axialer Richtung) sowie Verwendung von ferromagnetischem (weichem) Leitermaterial möglich.

daß durch Umkehrung des Drehsinnes sofort ermittelt werden kann, ob der Einfluß von Thermospannungen über die jeweilige Meßgenauigkeit hinausgeht (ist dies der Fall, dann liefert der Mittelwert für beide Drehrichtungen immer noch sehr genau den wahren Wert der Drehzahl, da bei Umkehr des Drehsinnes die Thermospannung einmal mit und das andere Mal entgegen der Induktionsspannung wirkt),

daß auch bei rascher veränderlichen Winkelgeschwindigkeiten durch ein trägheitsloses Anzeigegerät der richtige Zeitablauf des Momentanwertes der Winkelgeschwindigkeit aufgezeichnet werden kann, und

daß mechanische Bremsmomente lediglich in der Reibung bedingt sind, da keine Wirbelströme auftreten.

Die beschriebene einfachste Tachometertype nach Abb. 1 kann zwar keineswegs physikalische Originalität beanspruchen, da die Entdeckung des hierbei verwendeten Unipolarinduktionseffektes bereits auf Faraday zurückgeht; sie liefert aber immerhin bei wesentlich günstigerem mechanischem Aufbau einen weitaus höheren Meßeffect als das an der Harvard-Universität von Benfield⁶ und Mitarbeitern entwickelte Tachometer, dessen Wirkungsweise eigentlich als ziemlich ungünstige Ausnützung

⁵ Für einen ziemlich kleinen Magneten mit $\Phi = 6000 \text{ Gauß cm}^2 (= 60 \mu\text{Vs})$ ergibt sich z. B. bei bloß 1 Umdrehung pro Minute eine Meßspannung von $1 \mu\text{V}$, bei 3000 Umdrehungen pro Minute somit 3 mV . Dies ist wesentlich mehr als etwa bei Benfield (l. c.).

⁶ Benfield: Rev. sci. Instruments **20**, 663 (1949).

einer Art zeitlich veränderlicher⁷ Unipolarinduktion beschrieben werden kann: ohne auf Details hier näher eingehen zu können, sei nur kurz das Prinzip erklärt. Ein leitender, nicht magnetisierbarer Zylinder (etwa nach Abb. 3) ist mit einem exzentrischen Magneten M starr verbunden (bei Benfield durch einen Kunststoffisolator zur elektrischen Isolation, wobei freilich diese Isolation unnötig ist). Die zwischen A , B abgegriffene Spannung ist an sich keine konstante Gleichspannung, sondern bloß eine unsymmetrische Wechselspannung, deren Gleichstromanteil (zeitlicher Mittelwert) durch ein spannungsempfindliches Galvanometer gemessen werden muß, da der Meßeffect äußerst klein ist. Dieser zeitliche Mittelwert ist zwar tatsächlich der Drehzahl proportional, die Messung — insbesondere kleiner Drehzahlen — ist aber durch die beträchtliche Amplitude des symmetrischen Wechselstromanteiles, der außerdem noch von der Leitungsführung abhängt, erheblich gestört. Darüber hinaus ist der Aufbau mechanisch und festigkeitstechnisch recht ungünstig (zum Massenausgleich muß auf der dem Magneten entgegengesetzten Seite ein in Abb. 3 nicht eingezeichnetes Messinggegen-gewicht angebracht werden).

Wie der Verfasser experimentell feststellte, funktioniert die Anordnung Benfields auch dann, wenn der Magnet M gar nicht mitgedreht wird, sondern einfach im Laboratorium fest montiert ist. Die Meßspannung ist dann nicht nur eine wirkliche, das heißt konstante Gleichspannung, sondern der Meßeffect ist sogar wesentlich höher als bei der Originalanordnung Benfields, obwohl es sich hier um einen Typus der wirbelstrombehafteten Induktion handelt. Das Bremsmoment war jedoch in dem untersuchten Fall so gering, daß dieser Nachteil durch den wesentlich günstigeren Aufbau und ungleich höheren Meßeffect wettgemacht wurde.

In der Systematik nach Abschn. A entspricht das Benfield-Tachometer der Kennzeichnung II, 3, 4, 7, a, die soeben diskutierte Variante II, 3, 4, 6, b, die einfache Type nach Abb. 1 I, 3, a. Ohne auf nähere Details eingehen zu können, ist wohl klar, daß auch andere systematische Kombinationen nach Abschn. A zur Drehzahlmessung verwendet werden können. Hier seien nur noch folgende Typen zusammengestellt, die auf besonders zweckmäßiger Ausnützung der Unipolarinduktion beruhen:

Ein leitender Hohlzylinder rotiert im Luftspalt eines Topfmagneten (vgl. Abb. 4). Dies entspricht II, 3, 4 oder 5, 6, a (nur wenn Magnetfeld genau rotationssymmetrisch, sonst b).

Eine leitende Kreisscheibe rotiert im Luftspalt eines Hufeisenmagneten (vgl. Abb. 5). Dies entspricht II, 3, 4 oder 5, 6, a (nur wenn Magnetfeld rotations-symmetrisch, sonst b).

Nimmt man eine gewisse Wirbelstrombremsung⁸ in Kauf, dann kann das

⁷ Das Magnetfeld ist nicht stationär (vom Laboratorium aus) und somit das elektrische Feld nicht wirbelfrei.

⁸ Das unter der Bezeichnung „Wirbelstromtachometer“ bekannte Drehzahlmeßgerät beruht auf völlig anderer Wirkungsweise: dem Mitnahmedrehmoment eines oder mehrerer, mit der Welle mitrotierender Magnete, das diese auf eine um die gleiche Welle frei drehbare Leichtmetallscheibe ausüben, wird durch das rücktreibende Moment einer Spiralfeder kompensiert. Mit der Scheibe ist der Zeiger meist direkt verbunden. Zu einem solchen Mitnahmemoment kommt es entsprechend obiger Bemerkung über die Wirbelstrombremsung durch die Abweichung des Magnetfeldes von der Rotationssymmetrie. Die Kopplung mit dem untersuchten Objekt muß bei Fernablesung mechanisch erfolgen.

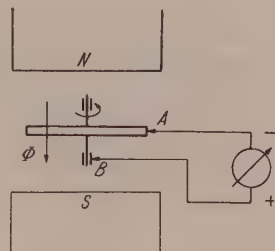


Abb. 5. Leiterschleife (magnetisierbar oder nicht) rotiert in axialsymmetrischem Magnetfeld. Wirbelströme bei Abweichung von Rotationssymmetrie (z. B. Feldbeschränkung auf radialen Streifen um A , B) können durch Lamellierung (radial) unterdrückt werden.

Magnetfeld im wesentlichen auf ein entsprechendes Bereich um das Meßgebiet $A B$ beschränkt werden, freilich ohne den gleichen Meßeffect wie bei rotationssymmetrischer Fortsetzung des Magnetfeldes erzielen zu können.

Die Größe des Meßeffectes wird am besten durch die Spannung pro Einheit der Drehzahl (U/f) ausgedrückt und kann für die stromfreien Typen einfach nach $U/f = \Phi_{AB}$ berechnet werden, wobei Φ_{AB} genau so wie bei dem zu Beginn dieses Abschnittes beschriebenen Tachometer definiert ist. Die kräftigste Meßspannung würde zweifellos nach Abb. 4 erreicht, wenn ein verkupfelter Eisenzylinder II, 3, 5, 6, a durch nicht magnetisierbares Material gelagert wird und durch teilweise Lamellierung in Axialrichtung Wirbelstromverluste bei nicht rotationssymmetrischem Magnetfeld unterdrückt werden.

C. Messung von Durchflußmengen und Geschwindigkeitsmessung an Flüssigkeiten.

Zur Erleichterung des Verständnisses möge zuerst die Geschwindigkeitsmessung an einem translatorisch bewegten Festkörper besprochen werden. In Abb. 6 seien $A B$ zwei ruhende Kontaktpunkte an den bewegten Leiterkörper. Bei Verwendung

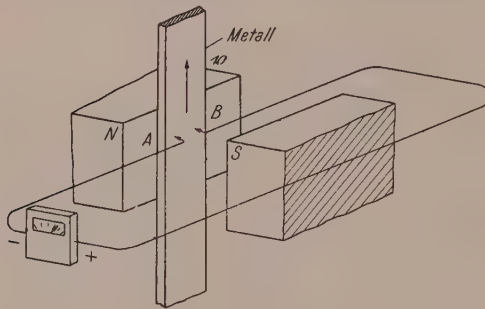


Abb. 6.

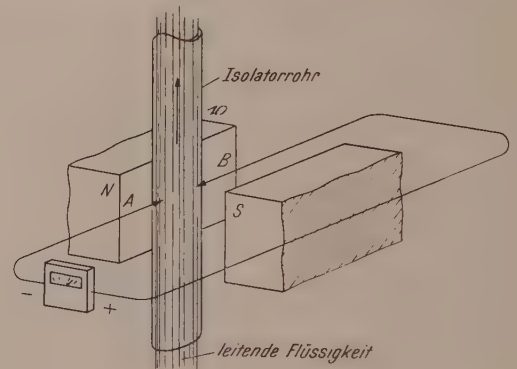


Abb. 7.

Abb. 6. Leiterstreifen oder Leiterstab wird durch ein Magnetfeld bewegt. A, B sind Schleifkontakte des im Laboratorium ruhenden Meßkreises.

Abb. 7. Eine leitende Flüssigkeit strömt durch ein Isolatorrohr im transversalen Magnetfeld. A und B sind Wandkontakte des Meßkreises an die strömende Flüssigkeit (Quecksilber).

eines homogenen, transversalen Magnetfeldes gilt die einfache Beziehung $U_{AB} = v B l$ bzw. $v = U/B l$, wobei l die Distanz der Kontaktstellen bedeutet, deren Verbindungslinie senkrecht zur Bewegungs- und Magnetfeldrichtung stehen möge [Fall II, 1, 4 oder 5, 6, (a)]. Die Meßspannung pro Einheit der Geschwindigkeit $U/v = B l$ hängt dann in gleicher Weise von Magnetfeldstärke und Kontaktdistanz ab und beträgt z. B. für $B = 1 \text{ Vs/m}^2$ ($= 10^4 \text{ Gauß}$) und $l = 1 \text{ cm}$ 10 mV pro 1 m/s Geschwindigkeit.

Der Effekt tritt praktisch in der gleichen Weise auf, wenn nur für eine hinreichende Umgebung der Meßstrecke AB das Magnetfeld homogen und die Bewegung eine Translation ist. Außerhalb des Meßgebietes kann also beispielsweise das Magnetfeld verschwinden und die Bewegung der Leitermaterie irgendwie umgelenkt werden (z. B. bewegtes, endloses Leiterband).

Der Effekt tritt ebenfalls in gleicher Weise auf, wenn die Bewegung nicht stationär ist (vgl. diesbezüglich Bemerkung in A). Verwendet man dann zur Anzeige ein entsprechend trägheitsarmes Meßgerät (Verstärker-Oszillograph), so kann der zeitliche Verlauf des Momentanwertes der Geschwindigkeit aufgezeichnet werden.

Im Laufe der Verfolgung hier nicht näher diskutierter Anwendungsmöglichkeiten der Unipolarinduktion auf magnetische Messungen führte der Verfasser ohne Kenntnis

des bereits früher von Kolin⁹ angegebenen Quecksilber-Magnetometers ein zu Abb. 7 analoges Experiment an strömendem Quecksilber aus. Hierbei wurden beim ersten Versuch einfach in einen Gummischlauch zwei dünne Metallfäden als Kontakte A B mit einer feinen Nähnadel eingezogen, wobei bereits mit einem relativ schwachen Magnetfeld an einem Zeigearbeit ein Ausschlag erzielt werden konnte, wenn man durch den Schlauch Quecksilber fließen ließ; ja sogar beim Hin- und Herschaukeln des im Schlauch befindlichen Quecksilbers konnten die Schwingungen an dem verwendeten Mikroampèremeter beobachtet werden.

Die ersten Anwendungen der Unipolarinduktion für Messungen an Flüssigkeiten wurden von Kolin¹⁰ und anderen für Zwecke der Biologie entwickelt, wo insbesondere die Leitfähigkeit des Blutes dazu verwendet wird, um mit Hilfe eines Magnetfeldes und entsprechender Elektroden den Zeitablauf des Blutstromes in Adern zu untersuchen.

Bei der Flüssigkeitsströmung in einem Rohr von kreisförmigem Querschnitt nimmt bekanntlich die Geschwindigkeit von einem Maximalwert in der Rohrmitte nach einer bestimmten Funktion (je nach Strömungscharakter verschieden) nach außen hin ab und ist unmittelbar an der Rohrwand praktisch gleich Null. Legt man nun ein konstantes, homogenes magnetisches Transversalfeld an (vgl. Abb. 8), dann wird zwischen zwei diametral gegenüberliegenden Kontaktpunkten A B der Rohrwand, die im übrigen aus einem Isolator bestehen muß, eine Spannung gemessen, die nur von der pro Zeiteinheit durch den Querschnitt beförderten Flüssigkeitsmenge, nicht aber vom Strömungscharakter abhängt.

Diese überraschende Tatsache wurde sowohl experimentell von Kolin und anderen festgestellt, als auch rechnerisch durch Thürlemann [Helv. physica Acta 14, 383 (1941)] nachgewiesen und vom Verfasser auch für enge Rechtecksquerschnitte experimentell und theoretisch in großer Annäherung als richtig gefunden.

Darüber hinaus spielt auch die spezielle Leitfähigkeit der Flüssigkeit keine Rolle (vgl. Erklärung im Anhang), natürlich nur solange, als die Belastung durch das Meßinstrument vernachlässigt werden kann (vgl. A). Für die Strömung durch ein Rohr mit Kreisquerschnitt gilt daher unabhängig von der Geschwindigkeitsverteilung $v = f(r)$

$$U_{AB} = \bar{v} \cdot B \cdot D,$$

wobei

$$\bar{v} = \int_F v \cdot df; \quad F = D^2 \pi/4,$$

wobei \bar{v} das Flächenmittel der Geschwindigkeit über den ganzen Querschnitt darstellt, das natürlich nur von der pro Zeiteinheit durchströmenden Flüssigkeitsmenge abhängt. Derartige Anordnungen mit Kontaktabgabe an der Rohrwand messen somit grundsätzlich nicht Geschwindigkeiten, sondern Durchflußmengen pro Zeiteinheit.

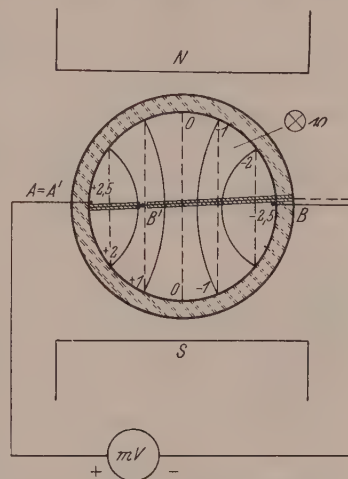


Abb. 8. Potentialverteilung bei rotationssymmetrischer Strömung einer Leiterflüssigkeit im transversalen Magnetfeld. A , B sind Wandkontakte an die Flüssigkeit. B' ist eine möglichst punktförmige Potentialsonde im Inneren des Querschnittes. Äquipotentiallinien für $v = \text{konst.} = \bar{v}$ strichliert, für laminare Strömung voll ausgezogen. Die Wirbelstromlinien sind nicht eingezeichnet (nach Thürlemann, l. c.).

⁹ A. Kolin: Rev. sci. Instruments 16, 209 (1945).

¹⁰ Z. B. Kolin: Proc. Soc. exp. Biol. Med. 35, 53 (1936).

Da es sich hier auch bei völlig homogenem Magnetfeld zufolge der Geschwindigkeitsverteilung um eine wirbelstrombehaftete Induktion handelt, kann die Meßspannung zwischen zwei Kontaktpunkten $A\ B$ oder $A'\ B'$ nicht einfach aus der bloßen Anwendung des allgemeinen Induktionsgesetzes ermittelt werden, sondern es muß das entsprechende Randwertproblem gelöst werden, das für den Kreisquerschnitt, rotationssymmetrische Geschwindigkeitsverteilung bezüglich der Rohrachse und homogenes Transversalfeld von Thürlemann (l. c.) berechnet wurde und hier nur das Ergebnis der Potentialverteilung über den Querschnitt hervorgehoben werden soll. In Abb. 8 sind vollausgezogen die Äquipotentiallinien für laminare Strömung $v = 2\bar{v} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ und für konstante Geschwindigkeit strichliert eingetragen, wobei vorausgesetzt wurde, daß in beiden Fällen die Durchflußmengen pro Zeiteinheit gleich sind. Wie aus Abb. 8 erkenntlich ist, hängen die Potentialwerte an der Rohrwand nicht vom Strömungscharakter ab. Dies nachzuweisen war Zweck der Untersuchung Thürlemanns, der auch experimentell für laminare und turbulente Strömung von Elektrolyten bei relativ großem Rohrquerschnitt diese Aussage recht gut bestätigte. Eine Kontrolle über die Potentialverteilung im Innern des Querschnittes wurde, soweit dem Verfasser bekannt, noch nicht experimentell durchgeführt. Der Verfasser hat daher diese Frage experimentell und theoretisch untersucht und insbesondere auch die Strömung durch nicht kreisförmige Querschnitte, z. B. enge Rechtecksquerschnitte, näher studiert. Da hierüber an anderer Stelle ausführlicher berichtet werden wird, soll hier nur hervorgehoben werden, daß nach der Überzeugung des Verfassers bei konsequentem Ausbau dieses Arbeitsgebietes eine Reihe bisher nicht in Erwägung gezogener Meßmethoden durchaus möglich erscheinen.

Während die Unabhängigkeit der Meßspannung vom Strömungscharakter bei Kreisquerschnitten für die biologische Anwendung und überhaupt für die reine Durchflußmessung höchst erwünscht ist, stellt diese Unabhängigkeit zugleich eine Unmöglichkeit für Aussagen über den Strömungscharakter dar. Dies gilt jedoch auch für den Kreisquerschnitt nur dann, wenn, wie bisher stets, die Meßkontaktpunkte an der Rohrwand liegen.

Wählt man jedoch als Meßpunkte zwei Stellen $A'\ B'$ im Innern, z. B. nach Abb. 8, dann wird die gemessene Potentialdifferenz bei gleicher Durchströmmenge je nach dem Strömungscharakter deutlich verschieden ausfallen müssen. Natürlich ist es nicht ganz leicht, einen Meßpunkt im Innern anzubringen, ohne die Strömung durch die Fixierung bzw. Zuleitung dieses Kontaktes (welche isoliert erfolgen muß) wesentlich zu stören. Ein qualitativer Vorversuch mit einem dünnen Platindraht, der mit Lack isoliert und nur an einer kleinen Stelle im strömungsabhängigen Potentialgebiet von der Lackschicht befreit wurde, hat diese Möglichkeit zumindest grundsätzlich bestätigt. Untersuchungen zur Verfeinerung der Methode und ihrer Anwendbarkeit auf elektrolytisch leitfähig gemachte Flüssigkeiten sind im Gange.

Um Mißverständnisse zu vermeiden, möge hervorgehoben werden, daß die zwischen zwei eng benachbarten, ideal punktförmig gedachten Meßkontakten $A'\ B'$ entstehende Spannung keine Aussage über die Geschwindigkeit in dem kleinen Bereich zwischen $A'\ B'$ erlaubt, obwohl in diesem Bereich die Geschwindigkeit als homogene Translation aufgefaßt werden könnte. Die genannte Meßspannung ist nämlich integral durch die gesamte Geschwindigkeitsverteilung bestimmt; sie kann auch zwischen zwei Punkten, an denen die lokale Strömungsgeschwindigkeit verschwindet, ohne weiteres einen größeren Wert besitzen als zwischen gleichorientierten und gleichweit entfernten Meßpunkten an Orten großer Geschwindigkeit. Die Möglichkeit hydrodynamischer Untersuchung besteht vielmehr grundsätzlich darin, daß es möglich ist, aus dem empirisch ermittelten Potentialfeld (z. B. A an Rohrwand, B über den Querschnitt

verschiebbar) bei bekanntem homogenem Magnetfeld und bekannter Durchflußmenge pro Zeiteinheit quantitativ die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion abzuleiten.

Begnügt man sich damit, bloß eine Entscheidung über die Qualität der Strömung zu finden, dann braucht keineswegs der ganze Querschnitt mit einer Potentialsonde abgetastet werden; es genügt dann, die Meßstelle A an einem Wandpunkt und die Meßstelle B an einem geeignet gewählten Punkt im Innern zu legen, da der Unterschied der Meßspannungen für verschiedenen Strömungscharakter bei gleicher Durchflußmenge recht erheblich sein kann.

Die Schwierigkeit bei Messung durch Potentialabgriff im Inneren liegt vor allem darin, daß sie wohl für strömendes Quecksilber mit Sicherheit und Stabilität durchgeführt werden kann, für andere Flüssigkeiten (die durch kleine Zusätze in einfachster Weise schwach leitfähig gemacht werden könnten) jedoch polarisationsfreie Elektroden und eine womöglich elektrostatische (bzw. möglichst hochohmige) Art der Spannungsmessung notwendig erscheinen.

D. Anhang.

In früherer Zeit¹¹ wurden Unipolarinduktionsuntersuchungen sehr zahlreich¹² durchgeführt, wobei allerdings das Hauptinteresse auf die qualitative Klärung der in Fluß befindlichen theoretischen Vorstellungen über Elektrodynamik konzentriert war. Die meßtechnische Anwendungsmöglichkeit dieser Effekte stand hiebei vollständig im Hintergrund. Nun ist die einst aktuelle Fragestellung über Kraftlinienbewegung (moving line theory), ruhenden Äther usw. genau so überholt wie etwa die Erklärung des Induktionsgesetzes mit Hilfe des „Kraftlinienschneidens“.

Auf der einen Seite haben sich eine Reihe beliebter Modellvorstellungen als unzulänglich oder irreführend herausgestellt, auf der anderen Seite führt die strenge Anwendung der eigentlich zuständigen relativistischen Methoden schon bei ziemlich einfachen Anordnungen unipolarer Induktion auf beträchtliche mathematische und sogar prinzipielle Schwierigkeiten (abgesehen von wenigen Spezialfällen übersteigt die Problemstellung sehr bald den Rahmen der speziellen Relativitätstheorie). Man kann es geradezu als Folge dieser Situation bezeichnen, wenn heute weite Kreise von Physikern und Ingenieuren dem Gesamtgebiet der Unipolarinduktionserscheinungen, ihrem Verständnis und ihrer meßtechnischen Anwendbarkeit ziemlich fremd gegenüberstehen. Im Hinblick hierauf soll in der folgenden physikalischen Erklärung der Effekte und der grundlegenden Berechnungsansätze ein ökonomischer Mittelweg eingeschlagen werden, der möglichst einfache und allgemein geläufige physikalische Vorstellungen in den Vordergrund stellt, ohne natürlich auf die quantitative theoretische Rechtfertigung und Fundierung der angegebenen Resultate in diesem Rahmen näher eingehen zu können¹³.

Allen in A genannten Möglichkeiten unipolarer Induktion (I, II, 1 bis 8, a, b) ist gemeinsam, daß die zwischen zwei Schleifkontaktstellen A B meßbare Spannung als gewöhnliche Potentialdifferenz

$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathfrak{E} d\mathfrak{s}; \quad \mathfrak{E} = - \text{grad } V \quad (1)$$

¹¹ Im Anschluß an die experimentellen Entdeckungen Faradays, der selbst bereits sehr viele Unipolarinduktionseffekte auffand, unter anderem sogar den Induktionseffekt an bewegten Flüssigkeiten vorhersagte und im Hinblick auf die damaligen theoretischen Grundlagen geradezu erstaunlich gut physikalisch deutete.

¹² Vgl. Swann: *Physic. Rev.* **15**, 365 (1920); Tate: *Bull. nat. Res. Council* **4**, Part 6, 24, 75 (1922) und Arbeiten von Barnett (1912), Kennard (1912) u. a. m.

¹³ Die entsprechenden wichtigsten Fragen und theoretischen Einwände werden an anderer Stelle noch publiziert.

unabhängig vom Integrationsweg über die Feldstärke \mathfrak{E} ermittelt werden kann. Wegen der zeitlichen Konstanz des Magnetfeldes muß nämlich das elektrische Feld wirbelfrei, also ein Potentialfeld sein, und zwar ohne Rücksicht darauf, ob Wirbelströme fließen oder nicht (b oder a).

Bei stromfreien ruhenden Leiterkörpern kann im Inneren kein elektrisches Feld vorhanden sein und die Feldstärke an der Oberfläche ist stets senkrecht zu dieser gerichtet (normale Elektrostatik).

Die Bewegung von Leiterkörpern im Magnetfeld besteht jedoch auch für den Fall, daß keine Ströme fließen, jedoch entsteht im allgemeinen ein nicht verschwindendes elektrisches Feld im Leiterinneren und eine elektrische Außenfeldstärke, die im allgemeinen nicht mehr auf die Oberfläche senkrecht steht. Man kann das Entstehen dieses elektrischen Potentialfeldes bei den als Unipolarinduktion zusammengefaßten Effekten einfach als eine Ladungsumordnung im allgemeinsten Sinn¹⁴ betrachten, die durch die elektromagnetischen Primärkräfte $P_{em} = Q [\mathfrak{v} \mathfrak{B}]$ ausgelöst wird, wobei die Kraft \mathfrak{P}_{em} (Lorentz-Kraft) jene Kraft bedeutet, mit der ein Magnetfeld der Induktion \mathfrak{B} auf eine mit der Geschwindigkeit \mathfrak{v} bewegte Ladung Q einwirkt.

Man erkennt somit eine recht anschauliche Analogie zur gewöhnlichen elektrostatischen Influenz, bei der die Ladungsumordnung freilich nicht durch die Lorentz-Kraft, sondern durch die elektrostatischen Kräfte der ruhenden Primärladungen bedingt ist, mit der diese Primärladungen ohne Anwesenheit der Influenz-Ladungsumordnung auf eine im Leiter frei verschieblich gedachte Ladung wirken würden. Der elektrostatischen Influenz am nächsten kommt somit die sehr vielfältig realisierbare wirbelstromfreie Unipolarinduktion, wo es wie bei der Influenz möglich ist, die primären Kräfte ($Q [\mathfrak{v} \mathfrak{B}]$) vollständig durch eine stationäre Ladungsumordnung zu kompensieren. In diesem Fall (a) muß die elektrische Kraft der induzierten Ladungsumordnung, $Q \mathfrak{E}_{ind}$, die primäre Lorentz-Kraft für das gesamte Leiterinnere gerade genau kompensieren. Es muß somit bei Abwesenheit von Strömen stets die folgende einfache Beziehung für das Leiterinnere gelten:

$$\mathfrak{E} = - [\mathfrak{v} \mathfrak{B}] \quad \text{für } i \equiv 0 \quad U_{AB} = \int_A^B [\mathfrak{v} \mathfrak{B}] d\mathfrak{s} \equiv V_B - V_A, \quad (2)$$

wie übrigens auch aus dem allgemeinen Induktionsgesetz bei richtiger Anwendung der „mitbewegten Integrationswege“ ohne weiteres folgt.

Dieser besonders einfache Fall der stromfreien Unipolarinduktion, den man geradezu als „elektromagnetische Influenz“ bezeichnen könnte, kann freilich nur dann auftreten, wenn ein wirbelfreies Primärkraftfeld ($[\mathfrak{v} \mathfrak{B}]$) vorliegt; denn die Wirbel eines primären Kraftfeldes können grundsätzlich nie durch ein Gegenfeld kompensiert werden, das, wie bereits oben betont, als Potentialfeld zwar nicht quellenfrei, aber notwendigerweise wirbelfrei sein muß. Dieser Gesichtspunkt tritt bei der elektrostatischen Influenz überhaupt nicht auf, da ja dort das primäre Kraftfeld nicht nur immer wirbelfrei, sondern (natürlich außerhalb dieser Primärladungen) auch noch quellenfrei ist. Selbst für die wirbelstromfreie Unipolarinduktion (elektromagnetische Influenz) ist jedoch z. B. bereits in den einfachen Fällen der Abb. 1, 2 das Primärfeld nicht quellenfrei und somit auch das Gegenfeld \mathfrak{E} der induzierten Ladungsumordnung. Aus diesem Grunde wurden auch z. B. in Abb. 8 (dies ist außerdem Fall b) nur die Äquipotentiallinien, nicht aber die elektrischen

¹⁴ Das heißt sowohl Makroumordnungen der Ladung, wie bei der geläufigen Ladungstrennung durch elektrostatische Influenz, als auch Mikroumordnungen in Form einer elektrischen Polarisierung, die bewegter magnetisierter Leitermaterie deswegen zukommt, weil jeder bewegte Träger eines magnetischen Momentes als elektrischer Dipol erscheint (ähnlich wie jeder bewegte elektrische Dipol ein magnetisches Moment besitzt).

Feldlinien (Kraftlinien) und die Erregungslinien eingezeichnet, deren physikalische Diskussion zwar recht interessant ist, aber hier zu weit führen würde¹⁵.

In allen Fällen, bei denen das primäre Feld der Lorentz-Kraft ($[\mathbf{v} \mathfrak{B}]$) nicht wirbelfrei ist, wird es daher neben der Ladungsumordnung auch zu Wirbelströmen kommen.

Für den häufig auftretenden Fall der Rotation eines starren Drehkörpers um seine Symmetrieachse hängt die Bildung von Wirbelströmen nicht etwa davon ab, ob das Feld homogen ist, sondern lediglich davon, ob das Magnetfeld bezüglich der Rotationsachse symmetrisch verläuft.

$$\left(\frac{\partial B_r}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \ (B_\varphi = 0), \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} = 0. \right)$$

Ein noch so stark inhomogenes Feld ist also an sich keine Ursache für Wirbelströme, wenn nur die Rotationssymmetrie bezüglich der Drehachse gewahrt bleibt (vgl. z. B. Abb. 2).

Für die meßtechnische Ausnutzung wird man unter sonst gleichen Bedingungen die wirbelstromfreie Art der Unipolarinduktion natürlich vorziehen, da dann keine Joulesche Wärmeentwicklung bzw. kein elektromagnetisches Bremsmoment entsteht und weil außerdem die rechnerische Ermittlung des Zusammenhanges zwischen Meßspannung, Magnetfeld und Bewegung von der einfachen Gl. (2) ausgehen kann.

Im Gegensatz hiezu muß in allen Fällen wirbelstrombehafteter Unipolarinduktion der Einfluß der Ströme berücksichtigt werden. Die elektrische Feldstärke für das Innere und die Spannung zwischen zwei Schleifkontaktpunkten $A B$ ist dann

$$\mathfrak{E} = - \left\{ [\mathbf{v} \mathfrak{B}] - \frac{1}{\sigma} \mathbf{i} \right\}; \quad U_{AB} = \int_A^B \left([\mathbf{v} \mathfrak{B}] - \frac{1}{\sigma} \mathbf{i} \right) d\mathbf{s} = V_B - V_A, \quad (3)$$

wobei \mathbf{i} die Leitungsstromdichte und σ die elektrische Leitfähigkeit bedeutet. Das elektrische Feld ist auch hier, wie bereits betont, wieder ein Potentialfeld. Es kann sozusagen nur der wirbelfreie Anteil des Primärfeldes ($[\mathbf{v} \mathfrak{B}]$) durch Ladungsumordnung kompensiert werden, während die Wirbel des primären Kraftfeldes nach Maßgabe der Leitfähigkeit des Materials ein Wirbelstromfeld hervorrufen.

$$\text{rot } \mathbf{i} = \sigma \text{ rot } [\mathbf{v} \mathfrak{B}]. \quad (4)$$

Da diese Wirbelströme der Leitfähigkeit proportional sind, die Abweichung der tatsächlichen Spannung (3) von den ohne Berücksichtigung der Wirbelströme nach (2) oder der bloßen Anwendung des Induktionsgesetzes überschlagenen Werten lediglich von dem Quotienten $\frac{i_w}{\sigma}$ abhängt, ergibt sich, daß die Meßspannung U_{AB} auch bei Anwesenheit von Wirbelströmen unabhängig von der Leitfähigkeit des Materials ist (natürlich wieder unter Voraussetzung vernachlässigbarer Belastung durch das Meßgerät)¹⁶.

¹⁵ Das heißt es kommt zur Ausbildung einer räumlichen Dichte der sog. „freien“ Ladung innerhalb des Leiters. Diese braucht zwar keineswegs zugleich eine „wahre“ Ladungsdichte bedeuten, kann es jedoch (z. B. im Falle der Rotation eines nicht magnetisierbaren Leiterzylinders im homogenen Axialfeld, wie dies der Verfasser in einer hier nicht mitgeteilten Rechnung auch in durchaus vernünftiger Übereinstimmung mit den Folgerungen aus einer von Trocheris angegebenen Behandlungsweise rotierender Bezugssysteme gefunden hat, die natürlich, wie nicht anders zu erwarten, über die hier nicht mehr zuständige spezielle Relativitätstheorie hinausgeht). (Trocheris: *Electrodynamics in a Rotating Frame of Reference*. *Philos. Mag. J. Sci.* Ser. 7, 40, No. 310, 1143, Nov. 1949.)

¹⁶ Die Richtigkeit dieser Behauptung wurde vom Verfasser unter anderem bei Rotation verschiedener Materialien in einem nicht rotationssymmetrischen Magnetfeld experimentell bestätigt gefunden. Eine weitere Bestätigung stellt das a. a. O. beschriebene Verhalten des elektromagnetischen Durchflußmessers dar.

Der auf S. 97 erwähnte Fall, daß die magnetische Feldverteilung für das ruhende Laboratorium nicht stationär ist, wird beispielsweise bei dem von Benfield angegebenen Tachometer (vgl. Abb. 3) realisiert. Ein anderes Beispiel hierfür ist die Torsionsschwingung eines Stabmagneten an einem elastischen Faden u. a. m. Zufolge der zeitlichen Veränderlichkeit des Magnetfeldes (für das Bezugssystem des Laboratoriums) gelten die für die stationäre Induktion erläuterten Ergebnisse hier natürlich nicht mehr. Es ist zwar nach wie vor $\operatorname{div} \mathfrak{E} = -\operatorname{div} [\mathfrak{v} \mathfrak{B}]$, aber das elektrische Feld ist wirbelbehaftet (also kein Potentialfeld):

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}. \quad (5)$$

Auch die Bedingung für das Auftreten von Wirbelströmen lautet jetzt anders, da ihre Wirbeldichte durch

$$\operatorname{rot} \mathfrak{i} = \sigma \left(\operatorname{rot} [\mathfrak{v} \mathfrak{B}] - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right) \quad (6)$$

gegeben ist.

Die Anwendung auf die Rotation von Festkörpern um eine ruhende Achse ergibt mit den selbstverständlich erfüllten Voraussetzungen $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$, $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$ unter Benützung einer bekannten vektoranalytischen Umformung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{i} = \sigma \left(\mathfrak{B} \operatorname{grad} \mathfrak{v} - \mathfrak{v} \operatorname{grad} \mathfrak{B} - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right). \quad (7)$$

Handelt es sich z. B. um einen Permanentmagnet, der mit der Winkelgeschwindigkeit ω gedreht werden möge, dann kommt es zu keinen Wirbelströmen, selbst wenn das Magnetfeld bezüglich der Drehachse grob unsymmetrisch ist. Für $-\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$ darf nämlich (in Zylinderkoordinaten) für diesen Fall in unserer primitiven Theorie $+\omega \left(\frac{\partial B r}{\partial \varphi}, \frac{\partial B \varphi}{\partial r}, \frac{\partial B z}{\partial \varphi} \right)$ gesetzt werden, während die Zusammenfassung der beiden restlichen Glieder aus Gl. (7) gerade einen entgegengesetzt gleichen Summanden liefern. Das Ergebnis steht auch im Einklang mit Erfahrungen an schwingenden Permanentmagneten u. a. m.

Die hier gegebene kurze Zusammenfassung der physikalischen Berechnungsgrundlagen und der einfachsten Vorstellungen erschien deshalb unerlässlich, weil die Literatur über Unipolarinduktion nicht nur sehr weit verstreut ist, sondern auch vielfältige Widersprüche aufweist. Diese Widersprüche beziehen sich wohl sehr häufig nur auf Quasiprobleme der individuell bevorzugten theoretischen Fragestellung, betreffen aber auch eine Reihe durchaus experimentell kontrollierbarer Aussagen. Im Interesse der Kürze und der Verständlichkeit für weitere Kreise wurde daher das Hauptgewicht auf eine möglichst leicht verständliche Erklärung gelegt, ohne daß freilich der Behandlung aller jener Effekte Platz gegeben werden konnte, die nach der Überzeugung des Verfassers von untergeordneter Bedeutung für die Praxis der meßtechnischen Anwendung sind.

Ich möchte nicht versäumen, dem Verband der Freunde der Technischen Hochschule in Wien für eine finanzielle Unterstützung dieser Publikation, sowie meinem verehrten Lehrkanzelsvorstand, Herrn Prof. Dr. F. Regler, für die großzügige Ermöglichung meiner eigenen Arbeiten zu danken. Herzlichster Dank gebührt auch Sr. Magn. Prof. Dr. L. Flamm, der sich trotz seiner starken Inanspruchnahme an meinen Arbeiten in liebenswürdiger Weise interessiert zeigte.

(Eingegangen am 4. Juli 1951.)

Spektrographische und elektronenoptische Kenngrößen bei Richtungs Doppelfokussierung.

Von H. W. Franke, Wien.

Mit 2 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Massen- und Geschwindigkeitsdispersion, Neigung der Auffangebene und Größe des Öffnungsfehlerscheibchens bei Richtungs Doppelfokussierung werden als Funktionen der bei der Reihenentwicklung der Felder auftretenden Koeffizienten angegeben. Die Bedingungen für Richtungs Doppelfokussierung, Geschwindigkeitsfokussierung und für erweiterte Richtungs Doppelfokussierung werden als Beziehungen zwischen diesen Koeffizienten angeführt. Auf eine Fokussierungsmöglichkeit zweiter Ordnung wird hingewiesen.

Summary. Mass and velocity dispersion, as well as the inclination of the collecting plane, and the size of the apertural error disk, are given, for directional double-focusing, as functions of the coefficients which result from expanding the fields into a series. The conditions for directional double-focusing, for velocity- and extended directional double-focusing appear as relations between these coefficients. Finally, a possibility for second-order focusing is shown.

Résumé. La dispersion des masses et des vitesses, la pente du plan collecteur, et la grandeur du disque du défaut d'ouverture, sont donnés, pour la focalisation à deux directions, comme fonctions des coefficients qui résultent du développement en série des champs. Les conditions pour focalisation à deux directions, pour focalisation des vitesses, et pour focalisation à deux directions étendue, paraissent comme relations entre ces coefficients. Enfin, on indique une possibilité de focalisation du second ordre.

1. Einleitung.

Die Verwendung von Massen- und Geschwindigkeitsspektrographen ist ständig im Steigen begriffen. Damit wachsen aber auch die Forderungen, die an die Leistungsfähigkeit dieser Apparate gestellt werden. Es hat sich als vorteilhaft erwiesen, von den früher verwendeten Feldern (homogenes Magnetfeld, Feld des Zylinderkondensators) zu allgemeineren rotationssymmetrischen Anordnungen überzugehen, worauf erstmalig Glaser hingewiesen hat¹. Seine Feldanordnungen gestatten es, auch Teilchen zu fokussieren, die aus der Ebene des Hauptkreises austreten und bisher ungenutzt blieben. Daraus resultiert eine beachtenswerte Intensitätssteigerung. Dieser Fall der „Richtungs Doppelfokussierung“ wurde in einer kürzlich erschienenen Arbeit² weiter untersucht, die dafür charakteristischen Größen, wie Massen- und Geschwindigkeitsdispersion, günstigste Lage der Auffangebene usw., wurden angegeben, und zwar als Funktionen einer das Feld beschreibenden Größe Q und deren Ableitungen am Hauptkreis. Es ist dadurch ermöglicht, für beliebige rotationssymmetrische Feldanordnungen die charakteristischen Größen anzugeben, da Q für jedes Feld bestimmt werden kann. Mehr ist man jedoch daran interessiert, umgekehrt die Felder nach den gestellten Anforderungen einzurichten, also etwa die gewünschte Dispersion vorzugeben und daraus die dafür notwendige Feldzusammensetzung zu berechnen. Diesem Zweck ist die beschriebene Form der Größenangabe noch nicht angepaßt; ihm wird es mehr entsprechen, die von Glaser empfohlene Reihenentwicklung der Felder vorzunehmen und die Größen als Funktionen der darin vorkommenden Koeffizienten darzustellen. Dies geschieht in der vorliegenden Arbeit. Allerdings wurde eine Spezialisierung vorgenommen, um die Formeln nicht zu unhandlich erscheinen zu lassen: es werden nur bezüglich der Hauptkreisebene symmetrische Felder

¹ W. Glaser: Richtungs Doppelfokussierung von Elektronenbahnen in inhomogenen elektrisch-magnetischen Feldern. Österr. Ing.-Arch. 4, 354 (1950).

² H. W. Franke: Richtungs Doppelfokussierung geschwindigkeits- und massenabweichender Teilchen in rotationssymmetrischen elektrisch-magnetischen Feldern. Österr. Ing.-Arch. 5, 371 (1951).

betrachtet. Dabei ergibt sich eine Fokussierungsmöglichkeit zweiter Ordnung, für die die Bedingungen angeführt werden.

Die vorliegende Arbeit schließt sich unmittelbar an die schon erwähnte Arbeit des Verfassers² an; die nicht näher erläuterten Abkürzungen sind hier im selben Sinne wie dort zu verstehen.

2. Reihenentwicklung der Feldkomponenten.

Es sollen nun die Feldkomponenten der magnetischen Induktion B_z und B_r in Reihen nach $r - r_0/r_0$ und z/r_0 entwickelt werden, wie dies etwa von Shull und Dennison³ beschrieben wurde. Sie hängen durch die Gleichungen $\text{rot } \mathfrak{B} = 0$ und $\text{div } \mathfrak{B} = 0$ zusammen. Berücksichtigung der Symmetriebedingung $B_z(r, z) = B_z(r, -z)$, die das Verschwinden der ungeraden Potenzen der Reihe verursacht, führt zum Ansatz

$$B_z = B_0 \left[1 - \alpha \frac{r-r_0}{r_0} + \beta \left(\frac{r-r_0}{r_0} \right)^2 - \gamma \left(\frac{r-r_0}{r_0} \right)^3 + C_1 \left(\frac{z}{r_0} \right)^2 + C_2 \frac{r-r_0}{r_0} \left(\frac{z}{r_0} \right)^2 + \dots \right]. \quad (1)$$

Für B_r lautet die Symmetriebedingung $B_r(r, z) = -B_r(r, -z)$ und die Entwicklung ist daher

$$B_r = B_0 \left[D_1 \frac{r-r_0}{r_0} + D_2 \left(\frac{r-r_0}{r_0} \right)^2 + D_3 \left(\frac{r-r_0}{r_0} \right)^3 + D_4 \frac{z}{r_0} + D_5 \frac{z}{r_0} \frac{r-r_0}{r_0} + D_6 \frac{z}{r_0} \left(\frac{r-r_0}{r_0} \right)^2 + D_7 \left(\frac{z}{r_0} \right)^3 + \dots \right]. \quad (2)$$

Durch Anwendung von $\text{rot } \mathfrak{B} = 0$,

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0, \quad (3)$$

und Koeffizientenvergleich erhält man

$$D_4 = -\alpha, \quad D_5 = 2\beta, \quad D_6 = -3\gamma, \quad D_7 = \frac{c_2}{2}, \quad (4)$$

Verwendung von $\text{div } \mathfrak{B} = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + r \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0, \quad (5)$$

liefert die Koeffizienten

$$D_1 = D_2 = D_3 = 0, \quad C_1 = \frac{\alpha}{2} - \beta, \quad C_2 = -\frac{\alpha}{2} - \beta + 3\gamma. \quad (6)$$

Daher sind die endgültigen Reihenentwicklungen

$$B_z(r, z) = B_0 \left[1 - \alpha \frac{r-r_0}{r_0} + \beta \left(\frac{r-r_0}{r_0} \right)^2 - \gamma \left(\frac{r-r_0}{r_0} \right)^3 + \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right) \left(\frac{z}{r_0} \right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta - 3\gamma \right) \frac{r-r_0}{r_0} \left(\frac{z}{r_0} \right)^2 + \dots \right], \quad (7)$$

$$B_r(r, z) = B_0 \left[-\alpha \frac{z}{r_0} + 2\beta \frac{r-r_0}{r_0} \frac{z}{r_0} - 3\gamma \left(\frac{r-r_0}{r_0} \right)^2 \frac{z}{r_0} - \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{2} + \beta - 3\gamma \right) \left(\frac{z}{r_0} \right)^3 + \dots \right]. \quad (8)$$

Auf analoge Weise ergeben sich mit Beachtung der Feldgleichungen $\text{rot } \mathfrak{E} = 0$ und $\text{div } \mathfrak{E} = 0$ und den Symmetriebedingungen $E_z(r, z) = E_z(r, -z)$ und $E_r(r, z) = -E_r(r, -z)$ die Reihen für die elektrischen Feldkomponenten

³ F. B. Shull und D. M. Dennison: The Double Focusing Beta-Ray Spectrometer. Physic. Rev. 71, 681 (1947); 72, 256 (1947).

$$E_z(r, z) = E_0 \left[(a-1) \frac{z}{r_0} - (a-2b-1) \frac{r-r_0}{r_0} \frac{z}{r_0} + (a-b+3c-1) \left(\frac{r-r_0}{r_0} \right)^2 \frac{z}{r_0} + \right. \\ \left. + \left(\frac{a}{6} + \frac{2}{3}b - c + \frac{1}{6} \right) \left(\frac{z}{r_0} \right)^3 + \dots \right], \quad (9)$$

$$E_r(r, z) = E_0 \left[1 - a \frac{r-r_0}{r_0} + b \left(\frac{r-r_0}{r_0} \right)^2 - c \left(\frac{r-r_0}{r_0} \right)^3 - \left(\frac{a}{2} - b + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{z}{r_0} \right)^2 - \right. \\ \left. - (a-b-3c+1) \frac{r-r_0}{r_0} \frac{z}{r_0} + \dots \right]. \quad (10)$$

3. Spektrographische und elektronenoptische Kenngrößen, Bedingungsgleichungen für Richtungs Doppelfokussierung.

Nun sollen die in der Arbeit von Glaser¹ und in der des Verfassers² angegebenen Feldbedingungen als Beziehungen zwischen den Feldparametern und die für Geschwindigkeits- und Massenspektrographie charakteristischen Größen als Funktionen von diesen geschrieben werden. Das hat den Vorteil, daß man stets die Zahl der noch frei wählbaren Parameter übersehen kann. Da die Feldgleichungen $\text{rot } \mathfrak{B} = 0$, $\text{div } \mathfrak{B} = 0$, $\text{rot } \mathfrak{E} = 0$ und $\text{div } \mathfrak{E} = 0$ bereits berücksichtigt sind, stehen zunächst alle Parameter zur Einrichtung des Feldes zur Verfügung. Man kann das Feld so vielen Bedingungen anpassen, als Parameter vorhanden sind.

Es sei an die Definition von Q erinnert:

$$Q = \eta \varphi - \frac{r^2 \dot{\psi}^2}{2}, \quad (11)$$

wobei $\dot{\psi}$ die Winkelgeschwindigkeit um die z -Achse bedeutet und gegeben ist durch

$$r^2 \dot{\psi} = \frac{\eta}{2\pi} \Psi + r_0^2 \omega - \frac{\eta}{2\pi} \Psi(r_0, z_0); \quad (12)$$

dann gilt

$$\ddot{r} = Q_r, \quad \ddot{z} = Q_z. \quad (13)$$

Die Feldbedingungen für den Hauptkreis lauten

$$Q_r = 0, \quad (14)$$

$$Q_z = 0. \quad (15)$$

(15) ist im angenommenen Symmetriefall stets erfüllt, (14) gibt die Beziehung

$$\eta E_0 + \eta \omega_0 r_0 B_0 - \omega_0^2 r_0 = 0 \quad (16)$$

oder mit Einführung von κ , dem Verhältnis zwischen magnetischer Kraft und Zentrifugalkraft

$$\kappa = \frac{e \omega_0 r_0 B_0}{m_0 r_0 \omega_0^2} = \eta \frac{B_0}{\omega_0}, \quad (17)$$

$$\eta \frac{E_0}{m_0 r_0 \omega_0^2} = 1 - \kappa. \quad (18)$$

Die erste Bedingung für Richtungs Doppelfokussierung

$$Q_{rz} = 0 \quad (19)$$

ist aus Symmetriegründen immer erfüllt. Die zweite Bedingung

$$Q_{rr} = Q_{zz} \quad (20)$$

erhält die Gestalt

$$\kappa^2 - 4\kappa + 4 + 2a\kappa - 2a - 2\alpha\kappa = 0. \quad (21)$$

Der Fokussierungswinkel ist dann gegeben durch

$$\psi_F = \pi \sqrt{\frac{2}{\kappa^2 - 2\kappa + 2}}. \quad (22)$$

Die Geschwindigkeitsdispersion einer Anlage mit Richtungsdoppelfokussierung ist

$$D_w = 4 \frac{2-\kappa}{\kappa^2-2\kappa+2} \frac{r_0}{\cos \delta} \frac{\Delta \omega}{\omega_0}. \quad (23)$$

Für δ , den Neigungswinkel der Auffangebene gegen die Ebene $\psi = \psi_F$, gilt (ohne Beschränkung auf erweiterte Richtungsdoppelfokussierung wie bei der Arbeit²⁾)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta = \frac{\pi}{4(\kappa-2)} \sqrt{\frac{2}{\kappa^2-2\kappa+2}} \left\{ 2\kappa^2 - 11\kappa + 14 - \alpha\kappa + \right. \\ \left. + \frac{2(\kappa-2)}{\kappa^2-2\kappa+2} [3\kappa^2 - 12\kappa + 12 + 3\alpha\kappa^2 - 4\alpha\kappa - 2(\beta\kappa - b\kappa + b)] \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

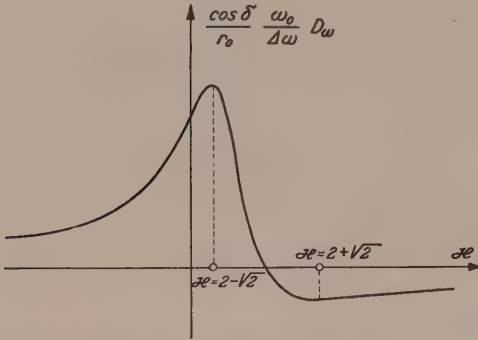


Abb. 1. Abhängigkeit der Geschwindigkeitsdispersion von der Verhältniszahl κ .

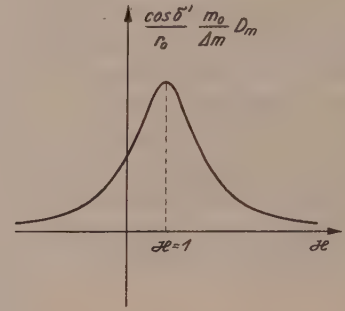


Abb. 2. Abhängigkeit der Massendispersion von der Verhältniszahl κ .

Die Massendispersion ist

$$D_m = \frac{4}{\kappa^2-2\kappa+2} \frac{r_0}{\cos \delta'} \frac{\Delta m}{m_0}, \quad (25)$$

wobei

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta' = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2}{\kappa^2-2\kappa+2}} \left\{ 2\kappa^2 - \kappa - 4 + a\kappa - a - \alpha\kappa + \right. \\ \left. + \frac{2}{\kappa^2-2\kappa+2} [3\kappa^2 - 12\kappa + 12 + 3\alpha\kappa^2 - 4\alpha\kappa - 2(\beta\kappa - b\kappa + b)] \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Die Bedingung für Geschwindigkeitsfokussierung lautet

$$\kappa = 2. \quad (27)$$

Dieser Wert von κ ist natürlich für Geschwindigkeitsfokussierung unbrauchbar, da dann $D_w = 0$ wird.

Bedingung für Richtungsdoppelfokussierung in einem Bereich von m , das der Grundmasse m_0 benachbart ist, kurz „erweiterte Richtungsdoppelfokussierung“ genannt, ist im Falle der Geschwindigkeitsspektrographie

$$\begin{aligned} 3\kappa^3 - 26\kappa^2 + 60\kappa - 40 - 2a\kappa^2 + 6a\kappa - 4a + 6\alpha\kappa^3 - \\ - 22\alpha\kappa^3 + 16\alpha + 8(\beta\kappa - b\kappa + b)(2 - \kappa) = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

im Fall der Massenspektrographie

$$\begin{aligned} 2\kappa^4 - 8\kappa^3 + 19\kappa^2 - 36\kappa + 28 + 2a\kappa^3 - 6a\kappa^2 + \\ + 6a\kappa - 2a - 2\alpha\kappa^3 + 12\alpha\kappa^2 - 14\alpha\kappa - 8(\beta\kappa - b\kappa + b) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Die Verbindungsgerade der Fokussierungspunkte erster Ordnung liegt im betrachteten Symmetriefall stets in der Ebene $z = z_0$.

4. Fokussierung zweiter Ordnung.

Zur Berechnung des Öffnungsfehlerscheibchens müssen die Größen zweiter Ordnung berechnet werden. In der zugrunde liegenden Arbeit² wurde angenommen, daß alle Teilchen den Anfangspunkt $r = r_0$, $z = 0$, $\psi = 0$ mit derselben Geschwindigkeitskomponente $v = r_0 \omega_0$ in Tangentenrichtung an den Hauptkreis durchlaufen, auch wenn sie noch zusätzlich eine dazu senkrechte Komponente besitzen, also von diesem Punkt auseinandergehen.

Nun sollen diese Fehler zweiter Ordnung auch unter einer anderen Anfangsbedingung betrachtet werden. Es sei angenommen, daß alle Teilchen den Anfangspunkt mit derselben Absolutgeschwindigkeit $r_0 \omega_0$ durchlaufen, so daß also die Komponente in Richtung der Tangente an den Hauptkreis $r_0 \omega_0 \cos \sqrt{\varrho^2 + \xi^2}$ ist oder — mit Vernachlässigung der Größen dritter und höherer Ordnung — $r_0 \omega_0 \left(1 - \frac{\varrho^2 + \xi^2}{2}\right)$ ⁴.

Der Öffnungsfehler ist bestimmt durch $r(t)$ und $z(t)$ an der Stelle $\psi = \psi_F$. Dazu wird zunächst $T = t(\psi_F)$ zu ermitteln sein⁵, und zwar genau in Größen erster Kleinheitsordnung; größere Genauigkeit wird nicht benötigt, wie man später sehen wird.

Als Ausgangsgleichung dient (12). Entwicklung in eine Taylorsche Reihe gibt

$$\dot{\psi}\Big|_{\substack{r=r_0+r_1 \\ z=z_1}} = \omega_0 + \frac{\eta}{2\pi r_0^2} \Psi_r r_1 + \frac{\eta}{2\pi r_0^2} \Psi_z z_1 - \frac{2\omega_0}{r_0} r_1 + \dots \quad (30)$$

Für r_1 und z_1 , die Abweichungen erster Ordnung von der Grundhauptbahn, gilt

$$r_1 = \frac{r_0 \omega_0 \varrho}{\alpha} \sin \alpha t, \quad z_1 = \frac{r_0 \omega_0 \xi}{\alpha} \sin \alpha t; \quad (31)$$

α ist definiert durch

$$\alpha^2 = Q_{rr} = Q_{zz}. \quad (32)$$

Daher wird

$$\dot{\psi} = \omega_0 + \left(\frac{\eta \varrho}{2\pi r_0} \Psi_r + \frac{\eta \xi}{2\pi r_0} \Psi_z - 2\omega_0 \varrho \right) \frac{\omega_0}{\alpha} \sin \alpha t \quad (33)$$

oder

$$\dot{\psi} = \omega_0 + K \omega_0 \sin \alpha t \quad (34)$$

mit der Abkürzung

$$K = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\eta}{2\pi} \frac{\varrho}{r_0} \Psi_r + \frac{\eta}{2\pi} \frac{\xi}{r_0} \Psi_z - 2\omega_0 \varrho \right). \quad (35)$$

Der nach der Zeit t erreichte Winkel ist

$$\psi = \int_0^t \dot{\psi} dt = \omega_0 t - \frac{K \omega_0}{\alpha} (\cos \alpha t - 1). \quad (36)$$

Nach der Zeit

$$t = T = \frac{\pi}{\alpha} - 2 \frac{K}{\alpha} \quad (37)$$

ist der Winkel $\psi = \psi_F$ erreicht, denn dann ist

$$\cos \alpha t = \cos (\pi - 2K) = -\cos 2K = -1 + 2K^2, \quad (38)$$

daher

$$\psi(T) = \frac{\omega_0 \pi}{\alpha} - \frac{2\omega_0 K}{\alpha} - \frac{K \omega_0}{\alpha} (-2 + 2K^2) = \frac{\omega_0 \pi}{\alpha} + \dots \quad (39)$$

⁴ Dieser Fall wurde von N. Svartholm in einer während der Korrektur zugänglich gewordenen Arbeit auf Grund einer anderen Methode untersucht; N. Svartholm, Ark. f. Fys. Bd. 2, Nr. 20 (1950).

⁵ Die Zeit T wurde bereits in der erwähnten Arbeit² angegeben, doch konnte dort die Berechnung aus Platzmangel nicht gebracht werden.

Damit können die Abweichungen erster Ordnung zur Zeit T angegeben werden

$$r_1(T) = \frac{r_0 \omega_0 \varrho}{\alpha} \sin \alpha \left(\frac{\pi}{\alpha} - \frac{2K}{\alpha} \right) = \frac{2r_0 \omega_0 \varrho K}{\alpha}, \quad (40)$$

$$z_1(T) = \frac{r_0 \omega_0 \xi}{\alpha} \sin \alpha \left(\frac{\pi}{\alpha} - \frac{2K}{\alpha} \right) = \frac{2r_0 \omega_0 \xi K}{\alpha}. \quad (41)$$

Nun müssen die zweiten Näherungen r_2 und z_2 berechnet werden. Dazu wird die Reihenentwicklung von (13) auf Größen zweiter Kleinheitsordnung erweitert. Man erhält für r_2 (vorläufig noch ohne Berücksichtigung der Symmetrie hinsichtlich der Hauptkreisebene):

$$\ddot{r}_2 = Q_{rr} r_2 + \frac{1}{2} Q_{rrr} r_1^2 + Q_{rrz} r_1 z_1 + \frac{1}{2} Q_{rzz} z_1^2 + \left(\frac{\eta r_0 \omega_0}{2} B_0 - r_0 \omega_0^2 \right) (\varrho^2 + \xi^2). \quad (42)$$

Einsetzen von (31) ergibt

$$\begin{aligned} \ddot{r}_2 = & Q_{rr} r_2 + \frac{1}{2} Q_{rrr} \frac{r_0^2 \omega_0^2 \varrho^2}{\alpha^2} \sin^2 \alpha t + Q_{rrz} \frac{r_0^2 \omega_0^2 \varrho \xi}{\alpha^2} \sin^2 \alpha t + \\ & + \frac{1}{2} Q_{rzz} \frac{r_0^2 \omega_0^2 \xi^2}{\alpha^2} \sin^2 \alpha t + \left(\frac{\eta r_0 \omega_0}{2} B_0 - r_0 \omega_0^2 \right) (\varrho^2 + \xi^2). \end{aligned} \quad (43)$$

Mit den Abkürzungen

$$K_1 = \frac{1}{2} \frac{r_0^2 \omega_0^2}{\alpha^2} (\varrho^2 Q_{rrr} + 2 \varrho \xi Q_{rrz} + \xi^2 Q_{rzz}), \quad (44)$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \frac{r_0^2 \omega_0^2}{\alpha^2} (\varrho^2 Q_{zrr} + 2 \varrho \xi Q_{zrz} + \xi^2 Q_{zzz}), \quad (45)$$

$$L = \left(\frac{\eta r_0 \omega_0}{2} B_0 - r_0 \omega_0^2 \right) (\varrho^2 + \xi^2) \quad (46)$$

erhält man die Differentialgleichung für r_2 und nach analoger Rechnung auch die für z_2 :

$$\ddot{r}_2 + \alpha^2 r_2 - K_1 \sin^2 \alpha t - L = 0, \quad (47)$$

$$\ddot{z}_2 + \alpha^2 z_2 - K_2 \sin^2 \alpha t = 0. \quad (48)$$

Lösung der ersten Gleichung ist:

$$r_2 = C_1 \sin \alpha t + C_2 \cos \alpha t + \frac{K_1}{3 \alpha^2} \sin^4 \alpha t + \frac{K_1}{\alpha^2} \cos^2 \alpha t - \frac{K_1}{3 \alpha^2} \cos^4 \alpha t + \frac{L}{\alpha^2}. \quad (49)$$

Die Konstanten bestimmt man aus den Anfangsbedingungen, daß zur Zeit $t = 0$ $r_2 = 0$ und $\dot{r}_2 = 0$ sein sollen. Man erhält

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{2}{3} \frac{K}{\alpha^2} - \frac{L}{\alpha^2}. \quad (50)$$

Die den Anfangsbedingungen angepaßte Lösung ist daher

$$r_2 = \frac{K_1}{3 \alpha^2} (-2 \cos \alpha t + \sin^4 \alpha t + 3 \cos^2 \alpha t - \cos^4 \alpha t) - \frac{L}{\alpha^2} (\cos \alpha t - 1) \quad (51)$$

oder nach einigen Umformungen

$$r_2 = \frac{K_1}{3 \alpha^2} (-2 \cos \alpha t + \cos^2 \alpha t + 1) - \frac{L}{\alpha^2} (\cos \alpha t - 1). \quad (52)$$

Auf ähnliche Weise wird

$$z_2 = \frac{K_2}{3 \alpha^2} (-2 \cos \alpha t + \cos^2 \alpha t + 1). \quad (53)$$

Zur Zeit T aus (37) gilt

$$r_2(T) = \frac{4}{3} \frac{K_1}{\alpha^2} + 2 \frac{L}{\alpha^2}, \quad z_2(T) = \frac{4}{3} \frac{K_2}{\alpha^2}. \quad (54)$$

Somit ist

$$R^* = r_1(T) + r_2(T) = \frac{2 \omega_0 r_0 \varrho}{\alpha} K + \frac{4}{3} \frac{K_1}{\alpha^2} + 2 \frac{L}{\alpha^2}, \quad (55)$$

$$Z^* = z_1(T) + z_2(T) = \frac{2 \omega_0 r_0 \xi}{\alpha} K + \frac{4}{3} \frac{K_2}{\alpha^2}. \quad (56)$$

Die endgültigen Ausdrücke für die Abweichungen zweiter Ordnung vom Hauptkreis an der Fokussierungsstelle sind daher

$$R^* = \left(\frac{3}{2} \frac{\eta \omega_0}{\pi \alpha^2} \Psi_r - \frac{6 \omega_0^2 r_0}{\alpha^2} + \frac{2}{3} \frac{r_0^2 \omega_0^2}{\alpha^4} Q_{rrr} \right) \varrho^2 + \left(\frac{2}{3} \frac{r_0^2 \omega_0^2}{\alpha^4} Q_{zzz} + \frac{\eta \omega_0}{2 \pi \alpha^2} \Psi_r - \frac{2 \omega_0^2 r_0}{\alpha^2} \right) \zeta^2, \quad (57)$$

$$Z^* = \left(\frac{\eta}{\pi} \frac{\omega_0}{\alpha^2} \Psi_r - \frac{4 \omega_0^2 r_0}{\alpha^2} + \frac{4}{3} \frac{r_0^2 \omega_0^2}{\alpha^4} Q_{zzr} \right) \varrho \zeta. \quad (58)$$

Als Funktionen der Entwicklungskoeffizienten erscheinen diese Gleichungen in der Gestalt (wobei nun wieder die Symmetrie hinsichtlich der Hauptkreisebene berücksichtigt wird)

$$R^* = \frac{4}{3} \frac{r_0}{(\kappa^2 - 2\kappa + 2)^2} \{ [3\kappa^3 - 12\kappa^2 + 22\kappa - 16 + 4a\kappa - 4a - 4\alpha\kappa^2 + 4\alpha\kappa + 8(\beta\kappa - b\kappa + b)] \varrho^2 + [9\kappa^3 - 24\kappa^2 + 6\kappa + 12 + 12\alpha\kappa^2 - 16\alpha\kappa - 8(\beta\kappa - b\kappa + b)] \zeta^2 \}, \quad (59)$$

$$Z^* = \frac{4}{3} \frac{r_0}{(\kappa^2 - 2\kappa + 2)^2} \{ 3\kappa^3 - 12\kappa^2 + 22\kappa - 16 + 4a\kappa - 4a - 4\alpha\kappa^2 + 4\alpha\kappa + 8(\beta\kappa - b\kappa + b) \} \varrho \zeta. \quad (60)$$

Nun seien Teilchen betrachtet, die innerhalb eines Kreiskegels $\varrho^2 + \zeta^2 = \sigma^2$ vom Anfangspunkt ausgehen. Setzt man $\varrho^2 + \zeta^2 = \sigma^2$ in die Gl. (59) und (60) ein, dann erhält man die Umgrenzungskurve des Öffnungsfehlerscheibchens, und zwar eine Ellipse in Parameterdarstellung. Damit ist eine Möglichkeit gewiesen, die Fokussierung noch weiter zu verbessern. Wird nämlich R gleich Null, dann artet das Fehlerscheibchen in eine Linie aus, wodurch das Auflösungsvermögen wie auch die Intensität weiter gehoben werden. Soll B verschwinden, dann müssen beide Koeffizienten der quadratischen Form (59) Null werden. Daraus folgt für die Parameter

$$a = \frac{-8\kappa^3 + 29\kappa^2 - 34\kappa + 14}{4(\kappa - 1)^2}, \quad (61)$$

$$\alpha = \frac{-6\kappa^3 + 19\kappa^2 - 18\kappa + 6}{4\kappa(\kappa - 1)}, \quad (62)$$

$$\beta\kappa - b\kappa + b = \frac{-9\kappa^4 + 48\kappa^3 - 100\kappa^2 + 96\kappa - 36}{8(\kappa - 1)}. \quad (63)$$

Im Falle der ersten Annahme über die Anfangsgeschwindigkeit (konstante Geschwindigkeitskomponente in Tangentenrichtung an den Hauptkreis im Anfangspunkt) erhält man statt (57) und (58) auf gleiche Weise

$$R = \left(\frac{\eta}{\pi} \frac{\omega_0}{\alpha^2} \Psi_r - \frac{4 \omega_0^2 r_0}{\alpha^2} + \frac{2}{3} \frac{r_0^2 \omega_0^2}{\alpha^4} Q_{rrr} \right) \varrho^2 + \frac{2}{3} \frac{r_0^2 \omega_0^2}{\alpha^4} Q_{zzz} \zeta^2, \quad (64)$$

$$Z = Z^*; \quad (65)$$

oder als Funktion der Entwicklungskoeffizienten

$$R = \frac{4}{3} \frac{r_0}{(\kappa^2 - 2\kappa + 2)^2} \{ [3\kappa^3 - 6\kappa^2 - 6\kappa + 12 + 12\alpha\kappa^2 - 8\alpha\kappa - 4(\beta\kappa - b\kappa + b)] \varrho^2 + 2[\kappa - 1 + a\kappa - a - \alpha\kappa^2 + \alpha\kappa + 2(\beta\kappa - b\kappa + b)] \zeta^2 \}, \quad (66)$$

$$Z = Z^* \quad (67)$$

und für die Koeffizienten bei Fokussierung zweiter Ordnung

$$a = \frac{-5\kappa^3 + 17\kappa^2 - 16\kappa + 2}{4(\kappa - 1)^2}, \quad (68)$$

$$\alpha = -\frac{3\kappa^3 + 7\kappa^2 - 6}{4(\kappa - 1)\kappa}, \quad (69)$$

$$\beta\kappa - b\kappa + b = -\frac{3\kappa^4 + 15\kappa^3 - 28\kappa^2 + 18\kappa}{8(\kappa - 1)}. \quad (70)$$

Welcher der beiden Fälle nun tatsächlich vorliegt, wird von der Natur des verwendeten Apparates abhängen. Durch die Wahl der Koeffizienten ist es möglich, für jeden Zweck die besten Fokussierungsmöglichkeiten zu schaffen.

5. Anwendung der angegebenen Feldbedingungen für die Einrichtung spezieller Feldkombinationen.

Um zu zeigen, wie die angegebenen Feldbedingungen zur Einrichtung von Feldern verwendet werden, soll zunächst eine Kombination gesucht werden, die den normalen Anforderungen der Massenspektrographie am besten entspricht. Es soll also die Geschwindigkeitsinhomogenität als so groß angenommen werden, daß man auf Geschwindigkeitsfokussierung nicht verzichten kann. Damit ist nach (27) über κ verfügt:

$$\kappa = 2.$$

Man hätte κ auch für andere Zwecke verwenden können, z. B. um einen besseren Wert für die Dispersion zu erreichen (s. Abb. 2). Für Richtungs-doppelfokussierung und Radialfokussierung zweiter Ordnung erhält man im ersten Fall (konstante Geschwindigkeitskomponente in Tangentenrichtung an den Hauptkreis im Anfangspunkt) nach (68) bis (70):

$$a = -\frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta\kappa - b\kappa + b = -\frac{1}{2}. \quad (71)$$

Daraus ergeben sich die Kenngrößen: Fokussierungswinkel:

$$\psi_F = \pi, \quad (72)$$

Neigung der Auffangebene:

$$\delta' = \arctg \frac{3}{4} \pi = 67^\circ 0', \quad (73)$$

Massendispersion:

$$D_m = 2 \frac{r_0}{\cos \delta'} \frac{\Delta m}{m_0} = 5.13 r_0 \frac{\Delta m}{m_0}, \quad (74)$$

Strichlänge (z-Abweichung):

$$Z = \frac{2}{3} r_0 \sigma^2. \quad (75)$$

Im zweiten Fall (konstante Geschwindigkeit im Anfangspunkt) wird nach (61) bis (63) und (28):

$$a = -\frac{1}{2}, \quad \alpha = -\frac{1}{4}, \quad \beta\kappa - b\kappa + b = -\frac{1}{2}. \quad (76)$$

Weiters erhält man für Fokussierungswinkel wieder:

$$\psi_F = \pi, \quad (77)$$

Neigungswinkel der Auffangebene:

$$\delta' = \arctg \frac{\pi}{2} = 57^\circ 30', \quad (78)$$

Massendispersion:

$$D_m = 2 \frac{r_0}{\cos \delta'} \frac{\Delta m}{m_0} = 3.73 r_0 \frac{\Delta m}{m_0}, \quad (79)$$

Strichlänge:

$$Z = 0. \quad (80)$$

Hier liegt also der ideale Fall vor, daß auch die Fokussierung zweiter Ordnung in beiden Richtungen erfolgt.

Es sei noch kurz eine Feldkombination für Geschwindigkeitsspektrographie angegeben. Die Geschwindigkeitsdispersion hat — wie aus (25) folgt — ihren höchsten Wert

$$D_{\omega} = 2 (\sqrt{2} + 1) \frac{r_0}{\cos \delta} \frac{\Delta m}{\omega_0}, \quad (81)$$

wenn

$$\kappa = 2 - \sqrt{2}. \quad (82)$$

Vgl. hierzu Abb. 1. Es sei der Wert

$$\kappa = \frac{1}{2},$$

in dessen Nähe das Maximum der Geschwindigkeitsdispersion liegt, betrachtet. Dann werden nach (29) und (61) bis (63) die Koeffizienten:

$$a = \frac{13}{4}, \quad \alpha = -1, \quad \beta \kappa - b \kappa + b = \frac{121}{64}, \quad (83)$$

Fokussierungswinkel:

$$\psi_F = \sqrt{\frac{8}{5}} \pi = 227^\circ 31', \quad (84)$$

Neigungswinkel der Auffangsebene:

$$\delta = \arctg \frac{\pi}{12} \sqrt{\frac{5}{2}} = 22^\circ 30', \quad (85)$$

Geschwindigkeitsdispersion:

$$D_{\omega} = \frac{24}{5} \frac{r_0}{\cos \delta} \frac{\Delta \omega}{\omega_0} = 5.30 r_0 \frac{\Delta \omega}{\omega_0}, \quad (86)$$

Strichlänge:

$$Z = 0. \quad (87)$$

Auch hier liegt also der Idealfall vor, daß Fokussierung zweiter Ordnung nach beiden Richtungen erfolgt.

Auf ähnliche Weise wird man vorgehen, wenn man die Felder anderen Bedingungen anpassen will.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. W. Glaser für sein Interesse am Zustandekommen der Arbeit und für wertvolle Hinweise ergebenst danken.

(Eingegangen am 1. Oktober 1951.)

Die Mißweisungen des künstlichen Kreiselhorizontes nach Fleuriais.

Von G. Heinrich, Wien.

Mit 5 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Im Anschluß an zwei vorangegangene Arbeiten werden die Störquellen untersucht, die zu Mißweisungen des künstlichen Kreiselhorizontes von Fleuriais Anlaß geben können. Als erstes wird ein aerodynamischer Störeffekt besprochen, der durch die Luftströmung in der Kreisdose verursacht wird. Er verschwindet, wenn der Kreisel im Vakuum läuft. Wird während des normalen Einschwingens der zeitliche Mittelwert der gemessenen Höhe des angepeilten Gestirns mittels eines Integrierwerkes bestimmt, so existiert eine optimale Integrierzeit, für die der Meßfehler ein Minimum wird; diese wird berechnet. Abschließend werden die durch das Schlingern des Schiffes hervorgerufenen Mißweisungen ermittelt und die optimale Lage der Beobachtungsebene in bezug auf die Längsachse des Schiffes berechnet.

Summary. In pursuance of two earlier papers, the author discusses the disturbances which may cause deviations of the artificial horizon of Fleuriais. First, an aerodynamic disturbing effect is considered which is caused by the air flow in the gyroscope box. This effect disappears when the gyroscope rotates in the vacuum. When the time mean value of the measured height is determined for a bearing by stars during normal building-up by means of an integrator, an optimum integration time exists for which the measuring fault will be a minimum; this time

is calculated. Finally, the deviations caused by the rolling of the vessel are determined, and the optimum position of the observation plane with regard to the roll axis of the vessel is computed.

Résumé. A propos de deux travaux précédents, l'auteur discute les causes qui peuvent donner lieu à des deviations du horizon fictif d'après Fleuriais. D'abord, un effet perturbant aérodynamique est discuté qui est causé par le courant d'air dans la boîte de toupie. Cet effet disparaît si l'on fait marcher la toupie dans le vide. En déterminant par un integrateur, pendant l'amorçage normal, la moyenne temporaire de la hauteur de relèvement, il existe un temps d'intégration optimum pour lequel l'erreur de mesure devient un minimum; ce temps est calculé. Enfin, on trouve les déviations causées par le roulis du vaisseau, et on calcule la position optimum du plan d'observation, relativement à l'axe longitudinal du vaisseau.

1. Einleitung.

In zwei vorangegangenen Arbeiten^{1, 2} untersuchte der Verfasser auf theoretischem und experimentellem Wege die Laufeigenschaften eines pinnengelagerten, auf einer kugelförmigen Pfanne auslaufenden symmetrischen Kreisels. Um die Verwendbarkeit eines nach diesem Prinzip arbeitenden künstlichen Horizontes zu prüfen, müssen noch die Fehlerquellen untersucht werden, die zu Mißweisungen Anlaß geben können.

Es kommen im wesentlichen drei Ursachen für die Mißweisung eines KreiselhORIZONTES nach Fleuriais in Betracht. Die erste rührt von einem aerodynamischen Effekt her, der durch die Luftzirkulation erzeugt wird, die sich in der Kreiseldose zufolge der Rotation des Kreisels ausbildet. Dies zeitigt die Erscheinung des gestörten Einschwingens. Die zweite Ursache leitet sich aus der praktischen Notwendigkeit her, durch Anwendung eines Integrierwerkes über eine gewisse Zeitdauer den zeitlichen Mittelwert aller Ablesewerte zu bilden, da man nicht abwarten kann, bis der Einschwingvorgang beendet ist. Obwohl dadurch eine bedeutende Fehlerreduktion stattfindet, bleibt noch ein Restfehler übrig, der möglichst klein gemacht werden soll. Die dritte Ursache rührt schließlich von der Seegangsbeschleunigung des Schiffes her.

2. Das gestörte Einschwingen des Kreisels.

Wir wollen uns zunächst mit der erwähnten Erscheinung des gestörten Einschwingens beschäftigen. Die Indexkurven² zeigten häufig gewisse Anomalien, die dadurch gekennzeichnet sind, daß die Verbindungskurve der Maxima nicht symmetrisch liegt zur Verbindungskurve der Minima.

Ein typisches Beispiel für eine Indexkurve dieser Art ist in Abb. 1 wiedergegeben. Außerdem ist die jeweilige Kreiseldrehzahl mit aufgenommen.

Da Anomalien dieser Art bei den erwähnten Einschwingspiralen², wo der KREISEL nicht in einer Dose lief, nie beobachtet wurden, muß man annehmen, daß dieser Effekt durch das Vorhandensein der Kreiseldose, in der der KREISEL im Sextanten läuft, bedingt ist. Eine derartige Wirkung ist jedoch nur durch Vermittlung der Luft, in der der KREISEL läuft, denkbar. Es handelt sich also um einen aerodynamischen Effekt.

Da die beobachtete Asymmetrie der Indexkurven, besonders bei Anwendung eines Integrierwerkes, das den zeitlichen Mittelwert des Höhenwinkels bildet, zu größeren Meßfehlern Anlaß gibt, soll diese Erscheinung näher untersucht werden.

Der asymmetrische Verlauf der Indexkurve legt es nahe, als Ursache eine asymmetrische Lage der Kreiselachse in der Vertikalstellung gegenüber der Kreiseldose zu vermuten. Abb. 2 zeigt den Ringspalt zwischen dem zylindrischen Kreiselkörper und der zylindrischen Dose bei asymmetrischer Lage des Kreisels. Die beiden

¹ Studie über den Lauf des Fleuriais-Kreisels. Österr. Ing.-Arch. 5, 2 (1951). Die Arbeit wird im folgenden kurz mit [S] bezeichnet.

² Experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Bewegung des pinnengelagerten Kreisels. Österr. Ing.-Arch. 5, 4 (1951). Die Arbeit wird im folgenden kurz mit [E] bezeichnet.

Mittelpunkte O_1 und O_2 haben die Entfernung a_0 , die wir als klein gegenüber den Radien a_1 und a_2 des Kreiselkörpers und der Dose annehmen. Die Dicke Δr des Ringspaltes in der Richtung λ gegenüber der Zentralen O_1, O_2 ist dann in erster Näherung:

$$\Delta r = (a_2 - a_1) - a_0 \cos \lambda. \quad (1)$$

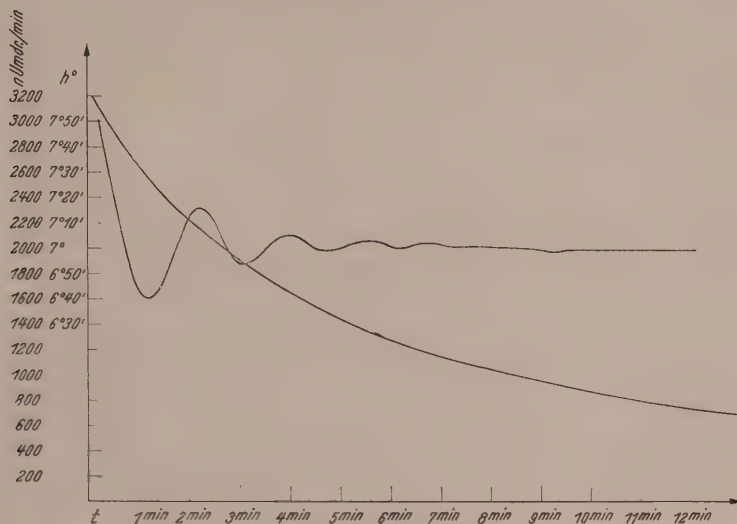


Abb. 1. Experimentell asymmetrische Indexkurve.

Ist v_L die mittlere Luftgeschwindigkeit im Ringspalt, so folgt aus der Kontinuität der zirkulatorischen Luftströmung:

$$v_L \cdot \Delta r = C.$$

Die Größe C stellt das in einer Axialerstreckung von 1 cm pro Sekunde durch den Querschnitt strömende Luftvolumen dar. Wir können es proportional der Winkelgeschwindigkeit des Kreisels annehmen und setzen:

$$v_L \cdot \Delta r = c \cdot \omega, \quad (2)$$

worin c hauptsächlich von der Oberflächenbeschaffenheit des Kreiselkörpers (kleine eingefräste Schaufeln für den Antrieb) abhängt. Vom spezifischen Gewicht γ_L der Luft ist c in erster Näherung unabhängig.

Wir wollen nun auf die Luftströmung im Ringspalt die Bernoullische Gleichung anwenden, die zumindest angenähert gelten muß. Sie lautet:

$$\frac{v_L^2}{2g} + \frac{p}{\gamma_L} = C_1. \quad (3)$$

p ist der Luftdruck und C_1 eine Konstante, auf deren Größe es im folgenden nicht ankommt. Aus (3), (2) und (1) folgt:

$$p = C_1 \cdot \gamma_L - \frac{\gamma_L}{2g} \cdot \frac{c^2 \cdot \omega^2}{(a_2 - a_1)^2} \left(1 - \frac{a_0}{a_2 - a_1} \cos \lambda \right)^{-2}. \quad (3a)$$

Ist l die wirksame axiale Länge des Kreiselkörpers, so ist die resultierende Druckkraft P_L auf den Kreiselkörper, die offenbar die Richtung der Zentrale O_2, O_1 besitzt:

$$P_L = - \int_0^{2\pi} a_1 l p \cdot \cos \lambda \cdot d\lambda.$$

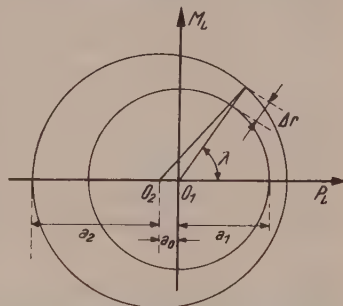


Abb. 2. Zur Theorie des asymmetrischen Einschwingens.

Aus (3a) folgt dann, wenn man nur die in a_0 linearen Glieder berücksichtigt:

$$P_L = \pi c^2 \frac{\gamma_L}{g} \frac{l a_1 a_0}{(a_2 - a_1)^3} c_0^2. \quad (3b)$$

Ist a_L schließlich der senkrechte Abstand des Krümmungsmittelpunktes der Lauffläche von der Wirkungslinie der Kraft P_L , so ist das Moment des resultierenden Luftdruckes M_L , dessen Vektor senkrecht zur Zentralen, in der in Abb. 2 eingezeichneten Richtung liegt, gegeben durch:

$$M_L = \pi c^2 \frac{\gamma_L}{g} \frac{l a_L a_1}{(a_2 - a_1)^3} a_0 \omega^2. \quad (3c)$$

Dieses Störmoment kann allerdings durch das Auftreten von axialen, druckausgleichenden Strömungen verkleinert werden. Wir könnten dies durch eine Verkleinerung der Konstanten c näherungsweise berücksichtigen.

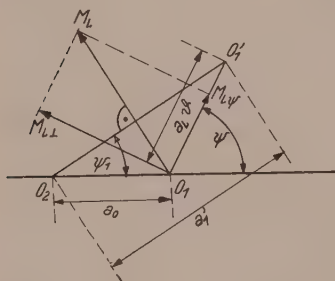


Abb. 3. Die beim asymmetrischen Einschwingen wirksamen Momente.

Es gibt nach (3c) mehrere Mittel, dieses Störmoment zu verringern. Zunächst kann man durch konstruktive Maßnahmen den Hebelarm a_L möglichst klein halten. Sehr wirkungsvoll ist eine Vergrößerung der mittleren Ringspaltbreite $a_2 - a_1$. Schließlich kann man durch Anwendung eines Vakuums in der Dose das Störmoment praktisch ziemlich ausschalten, während man eine gewisse Exzentrizität a_0 nicht völlig ausschalten kann.

Wir wollen nun aber prüfen, ob die aus dem Ansatz (3a) zu ziehenden Folgerungen für die Störung mit den experimentellen Befunden in Einklang stehen.

Die Lagenänderungen des Kreiselkörpers, die bei schräger Figurenachse dadurch entstehen, daß die Pinne zufolge der resultierenden Reibungskraft R_{es} nicht genau im tiefsten Punkt der Pfanne befindet, wollen wir als vernachlässigbar klein betrachten gegenüber der Lagenänderung des wirksamen Kreiselkörpers zufolge der Änderung des Winkels ϑ . Der Mittelpunkt O_1 des Kreiselkörpers wandert nach Abb. 3 bei einer Neigung der Figurenachse um den kleinen Winkel ϑ nach O_1' ; ψ ist der Azimutwinkel der Auslenkung, bezogen auf die Zentrale O_2 , O_1 . Die resultierende Exzentrizität besitzt dann die Größe a_1 und den Azimut ψ_1 . Es gilt dann, bei Beachtung von (3c):

$$M_L = K \cdot a_1 \omega^2, \quad (3d)$$

$$K = \pi c^2 \frac{\gamma_L}{g} \frac{l a_L a_1}{(a_2 - a_1)^3}. \quad (3e)$$

Für O_1 , O_1' können wir in erster Näherung $a_L \vartheta$ setzen. Wir können nun M_L in zwei Komponenten zerlegen: $M_{L\psi}$ in Richtung der Auslenkung der Figurenachse und $M_{L\perp}$, senkrecht dazu. Man findet dann, bei Beachtung von Abb. 3:

$$M_{L\psi} = K \omega^2 a_0 \sin \psi, \quad (4a)$$

$$M_{L\perp} = K \omega^2 (a_0 \cos \psi + a_L \vartheta). \quad (4b)$$

$M_{L\psi}$ wirkt dem Aufrichtmoment, $M_{L\perp}$ dem Präzessionsmoment entgegen. Dadurch wird aus den Kreiselgleichungen [E] Gl. (11a) und [E] Gl. (12):

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{-M_a + M_{L\psi}}{m r_T^2 \omega}, \quad (5a)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{-m g s \vartheta + M_{L\perp}}{m r_T^2 \omega}. \quad (5b)$$

Aus [S] Gl. (49a), [E] Gl. (11b) sowie Gl. (4a) und (4b) folgt, bei Beachtung von (3e):

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{k_a}{\omega} \vartheta + c_0 \omega \sin \psi, \quad (5c)$$

$$\vartheta \frac{d\psi}{dt} = -\frac{k_s}{\omega} \vartheta + c_L \omega \vartheta + c_0 \omega \cos \psi \quad (5d)$$

mit:

$$k_s = \frac{g s}{r_T^2} \quad (5e)$$

und

$$c_0 = \pi c^2 \frac{\gamma_L}{g} \frac{l a_L a_1 a_0}{m r_T^2 (a_2 - a_1)^3} \quad (5f)$$

sowie

$$c_L = \pi c^2 \frac{\gamma_L}{g} \frac{l a_L^2 a_1}{m r_T^2 (a_2 - a_1)^3}. \quad (5g)$$

Für den langsam auslaufenden Kreisel können wir ω zunächst wie eine Konstante behandeln und die Veränderlichkeit von ω erst im Resultat berücksichtigen (quasi-stationäre Behandlung).

Wir können die Gl. (5c) und (5d) zu einer einzigen komplexen Gleichung zusammenfassen. Dazu führen wir die komplexe Größe:

$$z = \vartheta e^{i\psi} \quad (6)$$

ein. z legt die Lage der Grundrißprojektion der Kreiselspitze in der Gaußschen Zahlenebene fest.

Multipliziert man (5d) mit i und addiert (5c), so ergibt sich nach Multiplikation mit $e^{i\psi}$ bei Beachtung von (6):

$$\frac{dz}{dt} = -\left[\frac{k_a}{\omega} + i\left(\frac{k_s}{\omega} - c_L \omega\right)\right] z + i c_0 \omega. \quad (7)$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für z , wenn man auf die Veränderlichkeit von ω keine Rücksicht nimmt. Ist z_A der Wert von z , der zu $t = 0$ gehört, so liefert die Integration von (7):

$$z = \left[z_A - \frac{i c_0 \omega^2}{k_a + i(k_s - c_L \omega^2)}\right] \cdot e^{-\left[\frac{k_a}{\omega} + i\left(\frac{k_s}{\omega} - c_L \omega\right)\right] t} + \frac{i c_0 \omega^2}{k_a + i(k_s - c_L \omega^2)}. \quad (7a)$$

Daraus kann man erkennen, daß die Bahn der Kreiselspitze in erster Näherung eine exzentrische logarithmische Spirale darstellt. Bei langsamer Abnahme von ω wird dabei das Windungszentrum:

$$z_s = \frac{i c_0 \omega^2}{k_a + i(k_s - c_L \omega^2)} \quad (8)$$

allmählich in die Richtung des wahren Lotes einwandern.

Setzt man $z_s = \vartheta_s e^{i\psi_s}$, so erhält man aus (8):

$$\vartheta_s = \frac{c_0 \omega^2}{\sqrt{k_a^2 + (k_s - c_L \omega^2)^2}}, \quad (8a)$$

$$\psi_s = \arctg \frac{k_a}{k_s - c_L \omega^2}. \quad (8b)$$

Da $c_L \omega^2$ klein ist gegen k_s , so nimmt ϑ_s in erster Näherung mit dem Quadrat der Drehzahl ab und ψ_s bleibt nahezu konstant. Die Bahn des Windungszentrums ist also nahezu geradlinig.

Die genaue Bahngleichung erhält man, wenn man $z_s = x_s + i y_s$ setzt und diese Werte aus (8) ausrechnet. Durch Elimination von ω erhält man dann die Bahngleichung in kartesischen Koordinaten:

$$x_s^2 + y_s^2 = \frac{c_0}{k_a c_L} (k_s y_s - k_a x_s) \quad (8c)$$

oder:

$$\left(x_s + \frac{c_0}{2 c_L}\right)^2 + \left(y_s - \frac{k_s c_0}{2 k_a c_L}\right)^2 = \frac{c_0^2 (k_a^2 + k_s^2)}{4 c_L^2 k_a^2}. \quad (8d)$$

Dies ist ein Kreis durch den Ursprung. Da aber praktisch nur die Umgebung des Ursprungs durchlaufen wird, kann man diesen Teil der Kurve durch die Gerade

$$y_s = \frac{k_a}{k_s} x_s \quad (8e)$$

approximieren. Die Bewegung des Windungszentrums erfolgt nach (8e) nicht in der Ebene der Exzentrizität (Zentrale $O_2 O_1$ in Abb. 3), sondern zufolge der Wirkung des Aufrichtmomentes ($k_a \neq 0$) unter dem Winkel $\arctg \frac{k_a}{k_s}$ gegen diese Richtung.

Die Bahn des Windungszentrums wird mit der Bahn der Kreisel Spitze identisch, wenn die anfängliche Auslenkung z_A mit z_s übereinstimmt [vgl. Gl. (7a) und (8)]. Ferner erkennt man aus (7), daß die Präzessionsfrequenz $\frac{k_s}{\omega}$ zufolge des aerodynamischen Effektes um c_L abnimmt (gilt nur für den fußlastigen Kreisel). Dieser Effekt ist unabhängig von der Exzentrizität a_0 .

Schließlich kann man nach der Form der Indexkurve Δh fragen. Ist ψ_0 der durch die Konstruktion des Sextanten festgelegte Winkel zwischen der Ebene der Exzentrizität und der Vertikalebene, in der die Beobachtung erfolgt, so gilt die Beziehung:

$$\Delta h = R (z e^{i \psi_0}),$$

wenn R den Realteil des Argumentes bedeutet. Daher liefert (7a), bei Verwendung von (8a) und (8b):

$$\Delta h = [\vartheta_A \cos(\psi_A + \psi_0) - \vartheta_s \cos(\psi_s + \psi_0)] e^{-\left[\frac{k_a}{\omega} + i \left(\frac{k_s}{\omega} - c_L \omega\right)\right] t} + \vartheta_s \cos(\psi_s + \psi_0). \quad (9)$$

Die Asymmetrie des Verlaufes der Indexkurve wird durch das Glied:

$$\vartheta_s \cdot \cos(\psi_s + \psi_0)$$

verursacht. Dieses Glied verschwindet für:

$$\psi_s + \psi_0 = (2n + 1) \frac{\pi}{2},$$

bei ganzzahligen n . Es gibt also ausgezeichnete Winkel ψ_0 , für die die Asymmetrie der Indexkurve verschwindet. Da aber ψ_s nach (8b) von k_a und damit nach [E] Gl. (11b) vom Abnutzungszustand der Pinne abhängt, kann sich die beobachtete Asymmetrie mit diesem Abnutzungszustand ändern. Damit dürfte eine Erklärung für den auffallenden Sachverhalt gefunden sein, daß die beobachteten Asymmetrien Schwankungen unterworfen waren.

Die experimentell festgestellten Erscheinungen des gestörten Einschwingens sind damit qualitativ aufgeklärt. Zum Zweck einer genaueren quantitativen Untersuchung waren Versuche in Vorbereitung, die leider nicht mehr zur Durchführung gelangten. Darnach sollte der Kreisel in einem schlankkonischen, zylindrischen Gefäß aus Plexiglas laufen, bei dem man durch axiale Verschiebung die mittlere Spaltdicke, durch radiale Verschiebung die Exzentrizität verstellen konnte. Die zugehörigen Einschwingspiralen sollten durch einen Lichtschreiber auf Photopapier aufgezeichnet werden.

Es soll zum Abschluß dieses Kapitels noch kurz auf die kleine Störung eingegangen werden, die durch die Erddrehung bedingt ist. Wir denken uns einen Kreisel, der auf feststehender Pfanne einschwingt. Aerodynamische Effekte wollen wir außer acht lassen.

Zufolge der Erddrehung tritt zu den Momenten der Pinnenreibung und der Schwerkraft noch ein von den Coriolis-Kräften herrührender Momentenvektor \overline{M}_C , der vom Vektor $\overline{\omega}_E$ der Erddrehung abhängt. Es gilt:

$$\overline{M}_C = m \cdot r_T^2 (\overline{\omega}_E \times \overline{\omega}), \quad (10)$$

worin \times das Zeichen für das vektorielle Produkt bedeutet.

Mißt man den Azimut ψ von Süden über Osten nach Westen (Südrichtung: $\psi = 0$), und ist φ die geographische Breite des Aufstellungsortes, so erhält man aus (10) die Zusatzglieder, die zu [E] Gl. (11a) und (12) hinzutreten:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{k_a}{\omega} \vartheta + \omega_E \cos \varphi \cdot \sin \psi, \quad (11a)$$

$$\vartheta \frac{d\psi}{dt} = -\frac{k_s}{\omega} \vartheta + \omega_E \sin \varphi \cdot \vartheta + \omega_E \cos \varphi \cdot \cos \psi. \quad (11b)$$

Diese Gleichungen besitzen denselben Bau wie die Gl. (5c) und (5d) für den aerodynamisch gestörten Kreisel. Wir können also die dortigen Ergebnisse sofort auf den Fall der Störung durch die Erddrehung übertragen, wenn wir $c_0 \omega$ durch $\omega_E \cos \varphi$ und $c_L \omega$ durch $\omega_E \sin \varphi$ ersetzen.

Wir erhalten also die Bahn der Kreisel Spitze in komplexer Form, wenn wir in (7a) die obigen Substitutionen ausführen:

$$z = \left[z_A - \frac{i \omega \omega_E \cos \varphi}{k_a + i(k_s - \omega \omega_E \sin \varphi)} \right] e^{-\left[\frac{k_a}{\omega} + i \left(\frac{k_s}{\omega} - \omega_E \sin \varphi \right) \right] t} + \frac{i \omega \cdot \omega_E \cos \varphi}{k_a + i(k_s - \omega \omega_E \sin \varphi)}. \quad (12)$$

Die Störungen sind hier, im Gegensatz zum aerodynamischen Effekt, proportional zu ω . Ist z_E das Windungszentrum dieser logarithmischen Spirale, so erhält man hierfür, in Analogie zu (6):

$$z_E = \frac{i \omega \omega_E \cos \varphi}{k_a + i(k_s - \omega \omega_E \sin \varphi)}. \quad (13)$$

Die zugehörigen Werte ϑ_E und ψ_E werden hieraus:

$$\vartheta_E = \frac{\omega \omega_E \cos \varphi}{\sqrt{k_a^2 + (k_s - \omega \omega_E \sin \varphi)^2}}, \quad (13a)$$

$$\psi_E = \arctg \frac{k_a}{k_s - \omega \omega_E \sin \varphi}. \quad (13b)$$

Der Azimut der quasistationären Gleichgewichtsstellung liegt also in dem zwischen der Süd- und Ostrichtung gelegenen Quadranten und nicht, wie man häufig liest, im Meridian. Das letztere träfe nur zu, wenn keine Aufrichtung wirksam wäre.

Die Kurve, auf der sich das Windungszentrum der Spirale bei abnehmendem ω bewegt, ist, analog zu (8c) in kartesischen Koordinaten:

$$x_s^2 + y_s^2 = \frac{\text{ctg } \varphi}{k_a} (k_s y_s - k_a x_s). \quad (14)$$

Da wieder nur kleine Werte von x_s und y_s in Frage kommen, können wir den kleinen Kreisbogen, der praktisch durchlaufen wird, durch die Gerade

$$y_s = \frac{k_a}{k_s} x_s \quad (14a)$$

ersetzen.

Die bei der Indexkurve auftretende Abweichung ist wieder Null, wenn der Azimut der Beobachtungsebene auf φ_E senkrecht steht. Da hier φ_E auf eine raumfeste Richtung bezogen ist, so ändern sich hier die Verhältnisse, im Gegensatz zum aerodynamischen Effekt, mit dem Azimut des angepeilten Gestirns.

Der durch die Erddrehung bedingte Effekt spielt jedoch, wie man leicht abschätzen kann, wegen der Kleinheit von ω_E , praktisch kaum eine Rolle.

3. Kreiselbewegung und Ablesefehler.

(Wirkung der Schiffsbeschleunigung.)

Auf einem bewegten Fahrzeug treten Beschleunigungskräfte auf, die den Lauf des Fleuriais-Kreisels beeinflussen. Doch auch durch das normale Einschwingen entstehen, wie wir sahen, gewisse Ableseschwankungen. Da es für die praktische Beobachtung meist zu lange dauert, bis der Einschwingvorgang beendet ist, muß bereits während des Einschwingens beobachtet werden. Durch Anwendung eines eingebauten Integrierwerkes, das den zeitlichen Mittelwert aller Ablesewerte bildet, kann der Ablesefehler weitgehend reduziert werden.

Dabei tritt das Problem auf, die Integrationszeit T_i so zu wählen, daß der gemittelte Ablesefehler $\overline{\Delta h}$ möglichst klein wird. Wir legen der Untersuchung zunächst das ungestörte Einschwingen des Kreisels längs einer logarithmischen Spirale zugrunde. Da die Integrierzeit aus psychologischen Gründen nicht zu groß sein soll, können wir in erster Näherung mit einer konstanten, mittleren Drehgeschwindigkeit des Kreisels rechnen.

Wir schreiben gemäß [E] Gl. (16a) und (5e):

$$\Delta h = h - h_0 = \vartheta_A e^{-\frac{k_a}{\omega} t} \cdot \cos \left(\varphi_A - \frac{k_s}{\omega} t \right). \quad (15)$$

Daraus folgt für den mittleren Ablesefehler während der Integrationszeit T_i :

$$\overline{\Delta h} = \frac{\int_0^{T_i} \Delta h \cdot dt}{T_i} = -\frac{\omega \cdot \vartheta_A}{T_i \sqrt{k_a^2 + k_s^2}} \left\{ e^{-\frac{k_a}{\omega} T_i} \cdot \cos \left(\varphi_A - \varphi_0 - \frac{k_s T_i}{\omega} \right) - \cos (\varphi_A - \varphi_0) \right\} \quad (16)$$

mit:

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{k_s}{\sqrt{k_a^2 + k_s^2}}. \quad (16a)$$

Das Ergebnis ist bei gegebenem ω , ϑ_A , k_a und k_s außer von der Integrierzeit T_i noch von dem zufälligen Anfangswert φ_A abhängig. Es ist also unmöglich T_i so zu wählen, daß Δh für alle φ_A verschwindet. Doch wird $|\overline{\Delta h}|$ für einen bestimmten Anfangswert φ_A einen Extremwert annehmen. Dies wird nach Gl. (16) für:

$$\varphi_A = \varphi_0 + \arcsin \frac{\sin \frac{k_s T_i}{\omega}}{e^{-\frac{k_a T_i}{\omega}} \cdot \cos \frac{k_s T_i}{\omega} - 1}$$

eintreten. Trägt man diesen Wert in (16) ein, so ergibt sich der Extremwert $|\overline{\Delta h_e}|$ zu:

$$|\overline{\Delta h_e}| = \vartheta_A \frac{\omega \sqrt{1 - 2 e^{-\frac{k_a T_i}{\omega}} \cdot \cos \frac{k_s T_i}{\omega} + e^{-\frac{2 k_a T_i}{\omega}}}}{k_s T_i \sqrt{k_a^2 + k_s^2}}. \quad (17)$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\frac{k_s T_i}{\omega} = \tau_i \quad (17a)$$

und:

$$\frac{k_a}{k_s} = \lambda. \quad (17b)$$

Dadurch wird aus (17):

$$|\Delta h_e| = \vartheta_A \frac{\sqrt{1 - 2e^{-\lambda \tau_i} \cos \tau_i + e^{-2\lambda \tau_i}}}{\tau_i \sqrt{1 + \lambda^2}}. \quad (18)$$

Denkt man sich nun τ_i veränderlich und sucht das Minimum von $|\Delta h_e|$ nach τ_i , so erhält man für den zugehörigen Wert von τ_i nach (17 a) eine günstigste Integrierdauer T_i . Gl. (18) hat nun im allgemeinen eine Reihe von Minima nach τ_i . Da die Integrierzeit jedoch aus psychologischen Gründen kurz sein soll, wählen wir den kleinsten Wert von τ_i , für den $|\Delta h_e|$ ein Minimum wird.

Aus (18) folgt für diesen Wert die Beziehung:

$$\lambda (\tau_i \cos \tau_i + \tau_i) + 2 \cos \tau_i + \tau_i \sin \tau_i - 2 = \Phi(\lambda, \tau_i) = 0. \quad (19)$$

Wir haben somit den kleinsten positiven Wert von τ_i aufzusuchen, der die Funktion $\Phi(\lambda, \tau_i)$ zu Null macht. Praktisch kommen hierbei für λ nach (17 b) bei Beachtung der Größenordnung von k_a und k_s , je nach der Abnutzung der Pinne, Werte von 0.04 bis 0.2 in Betracht.

Es wurden nun aus (19) für die Werte $\lambda = 0.004, 0.006, 0.1$ und 0.2 die kleinsten positiven Wurzeln der Gl. (19) nach dem Newtonschen Näherungsverfahren aufgesucht und in Abhängigkeit von λ in Abb. 4 aufgetragen. Außerdem wurde gleichzeitig der zugehörige Wert $100 \cdot \frac{|\Delta h_e|_{\min}}{\vartheta_A}$

in Abhängigkeit von λ eingezeichnet. Dies ist der mittlere Fehler in Prozent.

Man erkennt, daß die günstigste dimensionslose Integrierzeit τ_i sich mit λ nur wenig ändert. Der mittlere prozentuelle Fehler hingegen hat ein ausgesprochenes Minimum, das ungefähr bei $\lambda = 0.1$ liegt und bei ungünstigster Anfangsbedingung etwa 9% beträgt. Hier ist $\tau_i = 6.9$. Dies entspricht bei einer minutlichen Kreisel-drehzahl von n Umdr./min nach (17 a) einer günstigsten Integrierzeit von:

$$T_i = \frac{6.9 \pi n}{30 k_s} = 0.724 \frac{n}{k_s}. \quad (20)$$

Da T_i proportional der Drehzahl ist, erscheint es zweckmäßig, mehrere Integrierzeiten vorzusehen, um eine Anpassung an die jeweilige Kreisdrehzahl zu ermöglichen. Erfahrungsgemäß zeigte ein mit einer Fahrradpumpe hochgetriebener Kreisel zu Beginn des Auslaufes etwa 300 Umdr./min. An Hand der Auslaufkurve kann man dann, wenn man die Zeit mißt, einen Anhaltspunkt für die jeweilige Drehzahl und damit nach (20) für die günstigste Integrierzeit finden.

Der Wert von λ beträgt nach (17), (5e) und [E] Gl. (11b):

$$\lambda = \frac{f_1 a r^2}{(a^2 + f_1^2 r^2) s} = \frac{a}{f_1 s}, \quad (21)$$

da in den meisten Fällen a^2 gegen $f_1^2 r^2$ vernachlässigt werden kann. Setzt man hierin $\lambda = 0.1$ und $a = 0.00266$ cm (Pinnen mittlerer Abnutzung), so ergibt sich, wenn man $f = 0.21$ setzt, bei Verwendung von [S] Gl. (47a): $s = 1.07$ mm, was den üblichen Verhältnissen ziemlich entspricht. s ist, wie bereits erörtert, der scheinbare Schwerpunktsabstand¹ und muß nach der Präzessionsdauer beurteilt werden.

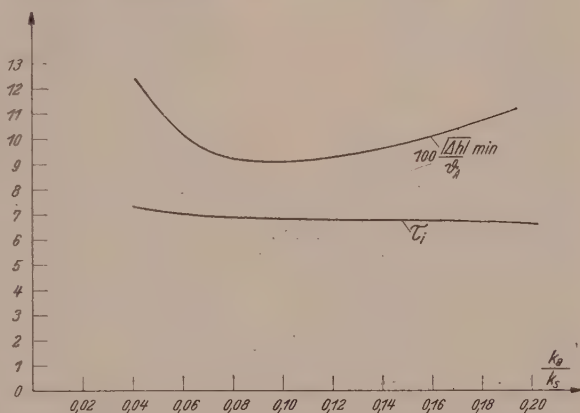


Abb. 4. Diagramm für die optimale Integrierzeit und für den mittleren prozentuellen Fehler.

Nach (5e) und (20) ist dann die Integrierzeit:

$$T_i = 0.724 \frac{r_T^2}{g s} \cdot n. \quad (20a)$$

Setzt man hierin $r_T = 2.68$ cm und $s = 0.107$ cm, so erhält man: $T_i \sim 100$ sek.

Im Anschluß hieran sollen die Ablesefehler behandelt werden, die durch die Schiffsbeschleunigungen entstehen. Hier muß man unterscheiden zwischen den Beschleunigungen, die von den Schiffsmanövern herrühren (Kursänderungen, Anfahren und Abbremsen) und den durch Schiffsschwingungen erzeugten Beschleunigungen. Die ersteren sind für unser Problem unwesentlich, da man Messungen während der Schiffsmanöver vermeiden wird.

Von den durch den Seegang bedingten Schiffsschwingungen geben nur die Schlingerbewegungen Anlaß zu merklichen Fehlern, da hier starke horizontale Beschleunigungen auftreten, auf die der Kreisel viel stärker anspricht als auf die für das Stampfen charakteristischen vertikalen Beschleunigungen.

In Abb. 5 fällt die y -Achse in die Längsachse des Schiffes; um sie erfolgt das Schlingern. Die Beschleunigung schwingt dann in Richtung der x -Achse. Denken wir uns wieder die Kreiselspitze (Einheitsvektor in Richtung der Figurenachse) auf die Grundrißebene x, y projiziert, so befindet sich diese in O , wenn die Kreiselachse im wahren Lot steht. Sie befindet sich in O_1 ,

Abb. 5. Zur Theorie der Störungen des Kreiselhorizontes infolge der Schiffsschwingungen.

wenn die Kreiselachse im momentanen Scheinlot steht (Winkelabstand $\frac{b}{g}$), wobei b klein gegen g vorausgesetzt wird. Fällt die Grundrißprojektion der Kreiselspitze nach S , so ist für den betrachteten Augenblick Präzessionsmoment und Aufrichtmoment vom Winkelabstand ϑ_1 des Punktes S von O_1 abhängig.

Das in Richtung SO_1 wirkende Aufrichtmoment beträgt M_a nach [S] Gl. (49a), wenn man nur das lineare Glied berücksichtigt, bei Beachtung von [E] Gl. (11b):

$$M_a = k_a \cdot m r_T^2 \cdot \vartheta_1. \quad (22)$$

Das Moment M_s der Schwerkraft steht senkrecht zur Richtung SO_1 im Sinne des in Abb. 5 eingezeichneten Pfeiles. Bei Beachtung von (5a) ergibt sich für M_s :

$$M_s = k_s \cdot m r_T^2. \quad (23)$$

Nach Abb. 5 gilt:

$$m r_T^2 \omega \frac{d\vartheta}{dt} = -M_a \cos \chi + M_s \sin \chi, \quad (24)$$

$$m r_T^2 \omega \vartheta \frac{d\psi}{dt} = -M_a \sin \chi - M_s \cos \chi. \quad (25)$$

Ferner gelten die geometrischen Beziehungen:

$$\vartheta_1 \cdot \cos \chi = \vartheta - \frac{b}{g} \cos \psi, \quad (26)$$

$$\vartheta_1 \cdot \sin \chi = \frac{b}{g} \sin \psi. \quad (27)$$

Führt man in (24) und (25) die Größen (22) und (23) ein, so erhält man bei Verwendung von (26) und (27):

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{k_a}{\omega} \vartheta + \frac{b}{g\omega} (k_a \cos \psi + k_s \sin \psi), \quad (28)$$

$$\vartheta \frac{d\psi}{dt} = -\frac{k_s}{\omega} \vartheta + \frac{b}{g\omega} (k_s \cos \psi - k_a \sin \psi). \quad (29)$$

Wieder kann man aus (28) und (29) eine einzige komplexe Gleichung gewinnen, indem man (29) mit i multipliziert, zu (28) addiert und gliedweise mit $e^{i\psi}$ multipliziert. Damit erhält man:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{\omega} (k_a + i k_s) z + \frac{b}{g \omega} (k_a + i k_s) \quad (30)$$

mit:

$$z = \vartheta e^{i\psi}. \quad (30a)$$

Wir setzen nun die Grundwelle der horizontalen Schlingerbeschleunigung b nach der Gleichung:

$$b = b_0 \cos \omega_s t \quad (31)$$

an. Dadurch entsteht aus (30):

$$\frac{d\zeta}{d\tau} + \kappa e^{i\alpha} \zeta = \kappa e^{i\alpha} \cdot \cos \tau \quad (32)$$

mit:

$$\zeta = \frac{g}{b_0} z = \frac{g}{b_0} \vartheta e^{i\psi}, \quad (32a)$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{k_a^2 + k_s^2}}{\omega \omega_s}, \quad (32b)$$

$$\alpha = \arctg \frac{k_s}{k_a}, \quad (32c)$$

$$\tau = \omega_s t. \quad (32d)$$

Wir können (32) wieder „quasistationär“ integrieren, indem wir die Veränderlichkeit von ω in der Differentialgleichung unberücksichtigt lassen. Dann ist κ konstant und (32) stellt eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit Störungsglied dar. Ihre Lösung besitzt die Form:

$$\zeta = \zeta_A \cdot e^{-\kappa (\cos \alpha + i \sin \alpha) \tau} + A_1 \cos \tau + A_2 \sin \tau, \quad (33)$$

worin ζ_A eine komplexe Integrationskonstante und A_1 und A_2 unbestimmte, komplexe Konstante bedeuten. Durch Einsetzen von (33) in (32) erhält man:

$$A_1 = \frac{\kappa^2 e^{2i\alpha}}{1 + \kappa^2 e^{2i\alpha}}, \quad (33a)$$

$$A_2 = \frac{\kappa e^{i\alpha}}{1 + \kappa^2 e^{2i\alpha}}. \quad (33b)$$

Es überlagert sich demnach über die normale Einschwingspirale eine erzwungene Schwingung von der Frequenz der Schlingerbewegung. Diese stellt die eigentliche Störung durch die Schlingerbewegung dar. Ihr entspricht eine gewisse, im Sextanten zu beobachtende Indexschwingung Δh , die sich bei Beachtung von (32a) zu:

$$\Delta h = \frac{b_0}{g} R (\zeta e^{-i\psi_0}) \quad (34)$$

ergibt. Hierin bedeutet R den Realteil des komplexen Argumentes und ψ_0 den Winkel, den die Beobachtungsebene mit der Ebene der Schlingerbeschleunigungen (Querachse des Schiffes) einschließt. Aus (34) und (33) erhält man, wenn man nur die Störungsglieder berücksichtigt ($\zeta_A = 0$):

$$\Delta h = \frac{b_0}{g} \left\{ \frac{\kappa^2 \cdot \cos (2\alpha - \psi_0) + \kappa^4 \cos \psi_0}{1 + \kappa^4 + 2\kappa^2 \cos 2\alpha} \cdot \cos \tau + \frac{\kappa \cos (\alpha - \psi_0) + \kappa^3 \cos (\alpha_1 \psi_0)}{1 + \kappa^4 + 2\kappa^2 \cos 2\alpha} \sin \tau \right\}. \quad (35)$$

Wir erhalten also eine harmonische Schwingung, deren Amplitude Δh_a sich aus (35) zu:

$$\Delta h_a = \frac{b_0 \kappa}{g} \left\{ \frac{1 + \kappa^2 + \sqrt{1 + \kappa^4 + 2\kappa^2 \cos 2\alpha} \cdot \cos [2(\psi_0 - \psi_1)]}{2(1 + \kappa^4 + 2\kappa^2 \cos 2\alpha)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (35a)$$

ergibt. Hierin bestimmt sich ψ_1 zu:

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{1 + \kappa^4 + 2\kappa^2 \cos 2\alpha}}. \quad (35b)$$

Da $\cos [2(\psi_0 - \psi_1)]$ die beiden Extreme ± 1 besitzt, schwankt die Größe von Δh_a je nach der Beobachtungsrichtung zwischen den beiden Extremen:

$$\Delta h_{a \max} = \frac{b_0 \kappa}{g} \left\{ \frac{1 + \kappa + \sqrt{1 + \kappa^4 + 2 \kappa^2 \cos 2 \alpha}}{2(1 + \kappa^4 + 2 \kappa^2 \cos 2 \alpha)} \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (36a)$$

$$\Delta h_{a \min} = \frac{b_0 \kappa}{g} \left\{ \frac{1 + \kappa - \sqrt{1 + \kappa^4 + 2 \kappa^2 \cos 2 \alpha}}{2(1 + \kappa^4 + 2 \kappa^2 \cos 2 \alpha)} \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (36b)$$

Praktisch haben wir nach den vorangegangenen Ausführungen mit $\frac{k_a}{k_s} \sim 0.1$ zu rechnen, demnach weicht α nach (33c) nur wenig von 90° ab. Wir setzen demgemäß $\alpha = 90 - \varepsilon$, worin ε einen kleinen Winkel bedeutet (Größenordnung 6°). Es ist dann in erster Näherung: $\sin 2\alpha = 2\varepsilon$ und $\cos 2\alpha = -1$. Aus (35b) folgt, wenn man $\kappa < 1$ voraussetzt:

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2(90 - \alpha)}{1 - \kappa^2}. \quad (35c)$$

Ebenso vereinfacht sich (36a) und (36b). Man erhält, wieder unter der Voraussetzung $\kappa < 1$:

$$\Delta h_{a \max} = \frac{b_0 \kappa}{g(1 - \kappa^2)}, \quad (36c)$$

$$\Delta h_{a \min} = \frac{b_0 \kappa^2}{g(1 - \kappa^2)}. \quad (36d)$$

Wenn κ in die Nähe von 1 kommt, werden die Amplituden sehr groß. Sie können aber, solange $k_a \neq 0$ ist und daher $|\cos 2\alpha|$ etwas kleiner als 1 ist, auch formelmäßig nicht unendlich werden. $\kappa = 1$ stellt einen Resonanzpunkt dar.

Ist T_p die Präzessionsdauer und T_s die Dauer einer vollen Schlingerschwingung, so gilt:

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} \quad (37)$$

und nach (33):

$$T_p = \frac{2\pi}{\kappa \omega_s \sin \alpha}. \quad (38)$$

Durch Elimination von ω_s folgt daraus:

$$\kappa = \frac{T_s}{T_p \sin \alpha} \sim \frac{T_s}{T_p}. \quad (39)$$

Es ist demnach:

$$\Delta h_{a \max} = \frac{b_0}{g} \frac{T_p \cdot T_s}{T_p^2 - T_s^2}, \quad (36e)$$

$$\Delta h_{a \min} = \frac{b_0}{g} \frac{T_s^2}{T_p^2 - T_s^2}. \quad (36f)$$

Um kleine Abweichungen zu bekommen, muß κ klein bleiben, es muß also $T_p \gg T_s$ gemacht werden. Dann kann man T_s^2 gegen T_p^2 vernachlässigen und erhält:

$$\Delta h_{a \max} = \frac{b_0}{g} \frac{T_s}{T_p}, \quad (36g)$$

$$\Delta h_{a \min} = \frac{b_0}{g} \frac{T_s^2}{T_p^2}. \quad (36h)$$

Die Fehleramplitude hängt also stark von der Richtung ab, in der man beobachtet. Nach (35b) ist für $\kappa \ll 1$: $\psi_1 = 90^\circ - \alpha$. Andererseits sieht man aus (35), daß Δh_a für: $\cos [2(\psi_0 - \psi_1)] = 1$ ein Maximum wird. Dann ist: $\psi_0 = \psi_1 = 90 - \alpha$. Das Maximum erhält man für $\cos [2(\psi_0 - \psi_1)] = -1$. Dem entspricht: $\psi_0 = 90 - \psi_1 = \alpha$. Die beiden Richtungen stehen also aufeinander senkrecht. $90^\circ - \alpha$ ist ein kleiner Winkel von der Größenordnung von 6° . Nach (32c) ist der Winkel α spitz oder stumpf, je nachdem das Vorzeichen von $\frac{k_s}{k_a}$ positiv oder negativ ist. k_s ist für fußlastigen Kreisel nach (5e) immer positiv. k_a ist nach [E] Gl. (11b) bei Drehung des

Kreisels im Gegenuhrzeigersinn (von oben gesehen) positiv, da in diesem Fall f positiv zu nehmen ist, bei Drehung im Uhrzeigersinn negativ (vgl. die Bemerkung am Ende von [S] Abschnitt 2). Läuft der Kreisel im Gegenuhrzeigersinn, dann ist α ein spitzer, beim Lauf im Uhrzeigersinn ein stumpfer Winkel. Das Minimum der Fehleramplitude tritt also bei Beobachtung in einer Vertikalebene auf, die gegen die Längsachse des Schiffes etwa um 6° geneigt ist. Man erhält die günstigste Beobachtungsrichtung, wenn man die Längsachse des Schiffes bei Kreisellauf im Gegenuhrzeigersinn nach rechts, bei Kreisellauf im Uhrzeigersinn nach links um etwa 6° verdreht. Senkrecht dazu stehen in beiden Fällen die Ebenen der ungünstigsten Beobachtung.

Aus (36g) und (36h) ersieht man, daß die Fehleramplituden um so größer werden, je größer die Schwingungsdauer der Schlingerbewegung ist. Es kommt also in erster Linie auf die Grundwelle an, während die Oberwellen kaum ins Gewicht fallen.

Man kann in (36g) und (36h) an Stelle von T_p auch die Drehzahl n des Kreisels einführen. Aus (32b) und (39) erhält man, wenn man k_a^2 gegen k_s^2 vernachlässigt: $\kappa = 1.52 k_s \frac{T_s}{n}$. Führt man dies in (36c) und (36d) ein und streicht κ^2 gegen eins, so ergibt sich:

$$\Delta h_{a \max} = \frac{b_0}{g} \cdot 1.52 k_s \frac{T_s}{n}, \quad (36i)$$

$$\Delta h_{a \min} = \frac{b_0}{g} \cdot 2.3 k_s^2 \frac{T_s^2}{n^2}. \quad (36j)$$

Die Fehleramplituden sind demnach verkehrt proportional der Drehzahl bzw. ihrem Quadrat. Bei kleinen Drehzahlen wird also der Kreisel bald so störanfällig, daß er als Horizontgeber nicht mehr taugt. Nehmen wir, in Übereinstimmung mit den früheren Zahlenwerten, $k_s = 13.6 \text{ sek}^{-2}$, so erhält man nach (36i) und (36j) bei einer Schlingerdauer von 7 sek für $n = 1000$ Umdr./min eine maximale Fehleramplitude von etwa 12% der „Scheinlotamplitude“ $\frac{b_0}{g}$ und eine minimale Fehleramplitude von etwa 2%.

Arbeitet man mit dem Integrierwerk, so erhält man einen mittleren Fehler von:

$$\overline{\Delta h} = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \Delta h \cdot dt,$$

nach (35) und (35a) wird hieraus:

$$\overline{\Delta h} = \frac{\Delta h_a}{T_i \omega_s} [\cos \omega_s t_0 - \cos \omega_s (T_i - t_0)],$$

worin t_0 von den Anfangsbedingungen abhängt. Da der Klammerausdruck im ungünstigsten Fall die Größe 2 annimmt, erhält man:

$$\overline{\Delta h} \leq \frac{2 \Delta h_a}{T_i \omega_s} = \frac{\Delta h_a}{\pi T_i} T_s.$$

Für T_i setzen wir den Wert (20) und erhalten:

$$\overline{\Delta h} \leq 0.44 k_s \frac{T_s}{n} \cdot \Delta h_a.$$

Dadurch wird der Fehler noch bedeutend reduziert. Im obigen Beispiel beträgt der mittlere Fehler bei ungünstigster Beobachtungsrichtung nur mehr 0.5%, bei günstigster Beobachtungsrichtung etwa 0.08% der Scheinlotamplitude. Dies entspricht bei einem Verhältnis $\frac{b_0}{g}$ von 0.1 ($5^\circ 43'$) im ungünstigsten Fall einem mittleren Fehler von 1.7', im günstigsten Fall von 0.3'. Durch Anwendung eines Integrierwerkes werden also die Beschleunigungsfehler so weit reduziert, daß sie praktisch kaum mehr ins Gewicht fallen.

(Eingegangen am 23. Oktober 1951.)

Die Bineutronen-Perioden der Reinelemente.

II. Teil*.

Von H. Watzlawek, Fritzens (Tirol).

Mit 6 Textabbildungen.

Zusammenfassung. 1. Die Untersuchung der Systematik der Reinelemente führt auf drei Bineutronen-Hauptperioden von der Länge $16 n_0^2 = 4^2 n_0^2$.

2. Das Bineutron $1 n_0^2$ besitzt den Spin $I = 0$ und den Grundzustand 1S_0 . Es ist als freies Teilchen höchst instabil und tritt nur unter besonderen experimentellen Bedingungen, z. B. Isotopenaufbau durch Einfang eines Bineutrons (s. Teil I, S. 304), in Erscheinung.

3. Auf Grund der Bineutronhypothese kann der Kernaufbau angesetzt werden zu:

$${}_N K_Z^M = x \cdot \mathfrak{k} + y \cdot p \dots N = \text{gerade.}$$

$${}_N K_Z^M = x \cdot \mathfrak{k} + y \cdot p + 1 \cdot n_0^1 \dots N = \text{ungerade.}$$

$$1 \mathfrak{k} = 1 (n_0^1 \cdot p_1^1 \cdot n_0^1) = 1 (n_0^2 \cdot p_1^1).$$

4. Jedes Reinelement liegt innerhalb einer Elementarzelle (von $Z = 9$ aufwärts) des $y = f(N)$ -Diagramms. Diese Aufbauzelle wird von 4 Kernen \bigcirc bzw. \bullet gesetzmäßig gebildet.

5. Aus dem gesetzmäßigen Aufbau des $y = f(N)$ -Diagramms aus lauter solchen Elementarzellen wird auf die Existenz eines hochstabilen Kernkörpers vom Aufbau $1 \mathfrak{K} = 4 \mathfrak{k} = 4 (n_0^2 \cdot p_1^1) = N_8 P_4$ geschlossen.

6. Dem Bineutron kann somit für das Auftreten der periodischen Eigenschaften der Kerne sowie für deren Systematik ein entscheidender Einfluß zugeschrieben werden.

Summary. 1. The study of the systematic theory of pure elements leads one to consider three main bineutron periods, of length $16 n_0^2 = 4^2 n_0^2$.

2. The bineutron $1 n_0^2$ has the spin $I = 0$, and the ground state 1S_0 . It is highly unstable as a free particle, and appears only under special experimental conditions, as, for instance, in the formation of isotopes by capture of a bineutron (part I, p. 304).

3. By assuming the bineutron hypothesis, the formation of the nucleus may be put up as

$${}_N K_Z^M = x \cdot \mathfrak{k} + y \cdot p \dots (N \text{ even}).$$

$${}_N K_Z^M = x \cdot \mathfrak{k} + y \cdot p + 1 \cdot n_0^1 \dots (N \text{ odd}).$$

$$1 \mathfrak{k} = 1 (n_0^1 \cdot p_1^1 \cdot n_0^1) = 1 (n_0^2 \cdot p_1^1).$$

4. Each pure element is located within an elementary cell of the $y = f(N)$ diagram (from $Z = 9$ upwards), this cell is formed in a regular manner by four nuclei \bigcirc , resp. \bullet .

5. From this regular manner in which the elementary cells form the diagram, it is inferred that a nuclear body of high stability exists, and that it has the following structure: $1 \mathfrak{K} = 4 \mathfrak{k} = 4 (n_0^2 \cdot p_1^1) = N_8 P_4$.

6. Consequently, the bineutron may have a decisive influence upon the appearance of such properties of the nuclei which are of a periodic character, and upon the systematic theory of nuclei.

Résumé. 1° Par l'étude de la théorie systématique des éléments purs, on arrive à trois périodes principales des bineutrons, d'une longueur $16 n_0^2 = 4^2 n_0^2$.

2° Le bineutron $1 n_0^2$ possède le spin $I = 0$ et l'état fondamental 1S_0 . Comme particule libre, il est très instable, et ne se présente que sous des conditions expérimentales spéciales, par exemple formation des isotopes par la capture d'un bineutron (part I, p. 304).

* I. Teil s. Österr. Ingenieur-Arch. 5, 304 (1951). II. Teil wesentlich gekürzter Auszug aus der Dissertationsarbeit.

Benützte Kernsymbolik wie in Teil I:

- | | |
|--|---|
| ■ Reinelement, stabil, Häufigkeit 100% | } auf ganzzahligem Bineutronennetz liegend. |
| ● Stabile Kerne, Isotop, max. Häufigkeit | |
| ○ Stabile Kerne, Isotop kleinerer Häufigkeit | |
| ✕ Stabile Kerne geringer Häufigkeit; auf halbzahligem Bineutronennetz liegend. | |

3° Basée sur l'hypothèse des bineutrons, la construction du noyau peut s'effectuer de la manière suivante:

$${}_N K_Z^M = x \cdot \mathfrak{k} + y \cdot p \dots (N \text{ pair}).$$

$${}_N K_Z^M = x \cdot \mathfrak{k} + y \cdot p + 1 \cdot n_0^1 \dots (N \text{ impair}).$$

$$1 \mathfrak{k} = 1 (n_0^1 \cdot p_1^1 \cdot n_0^1) = 1 (n_0^2 \cdot p_1^1).$$

4° Tout élément pur se trouve au dedans d'une cellule élémentaire (gradué de $Z = 9$) du diagramme $y = f(N)$. Cette cellule constructive est formée régulièrement de 4 noyaux \circ , respectivement \bullet .

5° De la construction régulière du diagramme composé de telles cellules élémentaires, on conclue sur l'existence d'une configuration nucléaire, extrêmement stable, de la construction $1 \mathfrak{k} = 4 \mathfrak{k} = 4 (n_0^2 \cdot p_1^1) = N_8 P_4$.

6° Ainsi, on peut attribuer au bineutron, concernant l'apparition des qualités périodiques des noyaux, ainsi que pour leur théorie systématique, une influence décisive.

Mittels der Häufigkeits-, Restneutronen- und Bineutronenperioden-Diagramme wurden im I. Teil* für die Systematik der stabilen Kerne drei Bineutronenhauptperioden von je 16 n_0^2 -Länge nachgewiesen. Die Reinelemente liegen bis auf die einzige Ausnahme ${}_{42}\text{As}_{33}^{75}$ innerhalb der Bineutronenperioden.

Die Neutronenzahlwerte der Anfänge und Enden der drei Hauptperioden werden als „magische“ Neutronenzahlen bezeichnet.

Die Haupt- und Zwischenperioden sind:

$$N = 0 \leftarrow \text{I. Periode } (16 n_0^2) \rightarrow 32,$$

$$N = 32 \leftarrow \text{1. Zwischenperiode } (9 n_0^2) \rightarrow 50,$$

$$N = 50 \leftarrow \text{II. Periode } (16 n_0^2) \rightarrow 82,$$

$$N = 82 \leftarrow \text{2. Zwischenperiode } (6 n_0^2) \rightarrow 94,$$

$$N = 94 \leftarrow \text{III. Periode } (16 n_0^2) \rightarrow 126.$$

Diese Perioden werden durch die folgenden experimentellen Tatsachen vollauf bestätigt:

1. Einfangswirkungsquerschnitt σ_{Einfang} in millibarns [$1 \text{ mb} = 10^{-27} \text{ cm}^2$] für 1 MeV-Neutronen der Reinelemente und der \bullet -Kerne, als Funktion der Neutronenzahl.
2. Quadrupolmoment in Abhängigkeit von der Neutronen- bzw. Protonenzahl.
3. $\frac{\text{Quadrupolmoment}}{(\text{Kernradius})^2} = f$ (ungerade Nukleonenzahl).
4. Magnetisches Kernmoment $\mu_{KM} = f(N)$; $N = \text{Neutronenzahl}$.
5. Kernspin $= f(N)$.
6. Lage der isomeren Kerne im Diagramm: $r = f(N)$; $r = \text{Rest-Bineutronenzahl}$.
7. Stabilitätsbereich der stabilen Kerne: $\frac{N}{Z} = f(Z)$ und $N - Z = f(Z)$.

Aus diesen experimentellen Unterlagen werde jetzt nur die Abhängigkeit nach (4) und (6) näher erörtert.

Die Abhängigkeit $\mu_{KM} = f(N)$ für die Reinelemente und für die \circ -, \bullet -Kerne zeigt deutlich die drei großen Hauptperioden und die beiden kleineren Zwischenperioden [Mittelwert $+ 2.5 \text{ KM}^1$].

Die \times -Kerne [einzige Ausnahme ${}_{105}\text{Cp}_{71}^{176}$] liegen nur im Bereich $-1 \text{ KM} \leftarrow 0 \rightarrow +1 \text{ KM}$ (s. Abb. 1).

Die Betrachtung der Lage der isomeren Kerne im Diagramm, Restbineutronenzahl $r = f(N)$, ergibt folgende Gesetzmäßigkeiten:

¹ 1 KM = 1 Kernmagneton.

1. Die isomeren Kerne liegen ausnahmslos reinnetzig.
2. Die isomeren Kerne, die auf dem halbzahligen Bineutronennetz liegen, kommen doppelt so häufig vor als jene, die auf dem ganzzahligen Netz liegen.
3. Die isomeren Kerne, die auf dem ganzzahligen Bineutronennetz liegen, befinden sich bis auf die einzige Ausnahme ${}_{48}^{87}\text{Y}_{39}$ nur innerhalb der drei Bineutronen-Hauptperioden.

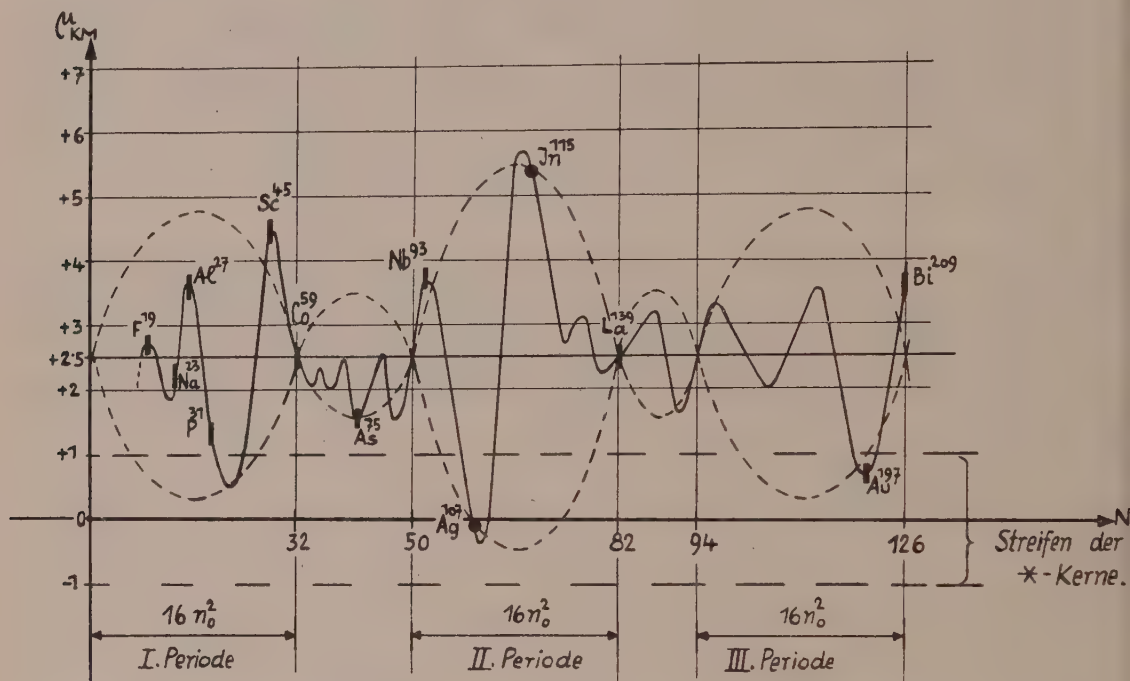


Abb. 1 (schematisch). Perioden des magnetischen Kernmomentes der Reinelemente und der O-, ●-Kerne.

4. Die isomeren Kerne des ganzzahligen Bineutronennetzes sind vorwiegend Isotopen der Reinelemente und der Elemente Ag, In und Pb (vgl. Abb. 1).
5. Gegen Ende der geschlossenen Schalen mit den Neutronenzahlen $N = 32, 50, 82$ und 126 häufen sich die isomeren Kerne mit ungerader Massenzahl.
6. Die isomeren Kerne lassen sich in vier Gruppen einteilen [$r = 0$ bis 22]:
 - a) $N_g = N_{\text{gerade}}$ } Ganzzahliges Bineutronennetz; Häufigkeit $\sim 24\%$.
 $Z_u = Z_{\text{ungerade}}$ } Restbineutronenzahl $r = \frac{1}{2} [N - Z + 1]$.
 - b) N_u, Z_g . Halbzahliges Bineutronennetz; Häufigkeit $\sim 43\%$. Restbineutronenzahl $r = \frac{1}{2} (N - Z)$.
 - c) N_g, Z_g . Ganzzahliges Bineutronennetz; Häufigkeit $\sim 6\%$. Restbineutronenzahl $r = \frac{1}{2} (N - Z)$.
 - d) N_u, Z_u . Halbzahliges Bineutronennetz; Häufigkeit $\sim 27\%$. Restbineutronenzahl $r = \frac{1}{2} [N - Z + 1]$.
7. Die isomeren Kerne besitzen vorwiegend die Spinwerte $\frac{1}{2}, \frac{7}{2}$ und $\frac{9}{2} \hbar$, während die Werte $\frac{2}{3}$ und $\frac{2}{5} \hbar$ kaum vorkommen.

Wird auf Grund der überzeugenden experimentellen Tatsachen die Hypothese aufgestellt, daß das Bineutron $1\ n_0^2$ für den Kernaufbau, in einem „elementaren Kernkörper $1\ \bar{f} = 1\ (n_0^2\ p_1^1)$ “ eingebaut auftritt, dann können folgende Schlüsse gezogen werden:

1. Der Aufbau eines Kernes wird angesetzt in der Form:

$$\underline{{}_N K_Z^M = x \cdot \bar{f} + y \cdot p_{\text{Rest}} + 1 \cdot n_{\text{Rest}}.} \quad (1)$$

p_{Rest} = Restproton, n_{Rest} = Restneutron.

$n_{\text{Rest}} = 0 \dots$ ganzzahliges Bineutronennetz [Reinelemente und \circ -, \bullet -Kerne].

N = gerade.

$n_{\text{Rest}} = 1 \dots$ halbzahliges Bineutronennetz [\times -Kerne]. N = ungerade.

$x + y = Z$.

Für N_0 = gerade gilt: $x = \frac{N_0}{2}$, $y = Z - x$, $n_{\text{Rest}} = 0$.

$$\underline{{}_{N_0} K_Z^{M_0} = x \cdot \bar{f} + y \cdot p.} \quad (1a)$$

Für N = ungerade gilt: $n_{\text{Rest}} = 1 \cdot n_0^1$; $x = \frac{(N_0 + 1) - 1}{2}$, $y = Z - x$.

$$\underline{{}_{N_0+1} K_Z^M = x \cdot \bar{f} + y \cdot p + 1 \cdot n_0^1.} \quad (1b)$$

Die Gl. (1a), (1b) gelten für das Grundisotop. Für die Isotope mit den höheren Massenzahlen erhält man:

$$\begin{array}{ll} {}_{N_0+1} K_Z^{M_0+1} = x_0 \cdot \bar{f} + y_0 p + 1 \cdot n_0^1 & \text{und} \quad {}_{N_0+2} K_Z^{M_0+2} = (x_0 + 1) \bar{f} + (y_0 - 1) p. \\ {}_{N_0+3} K_Z^{M_0+3} = (x_0 + 1) \bar{f} + (y_0 - 1) p + 1 \cdot n_0^1. & {}_{N_0+4} K_Z^{M_0+4} = (x_0 + 2) \bar{f} + (y_0 - 2) p. \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Für die Isotopen mit gleichem Protonenrest ergibt sich:

$$\underline{K_Z^M = K_Z^{M+1} + n_0^1.} \quad (1c)$$

2. Weitere interessante Aufschlüsse liefert das $y = f(N)$ -Diagramm: Betrachtet man die Umgebung der „instabilen Zonen“ [s. Teil I, S. 309, Abb. 4], dann folgt: [Abb. 2; Analoges für die anderen instabilen Zonen $N = 19, 21; 61; 89; 111, 115; 123$].

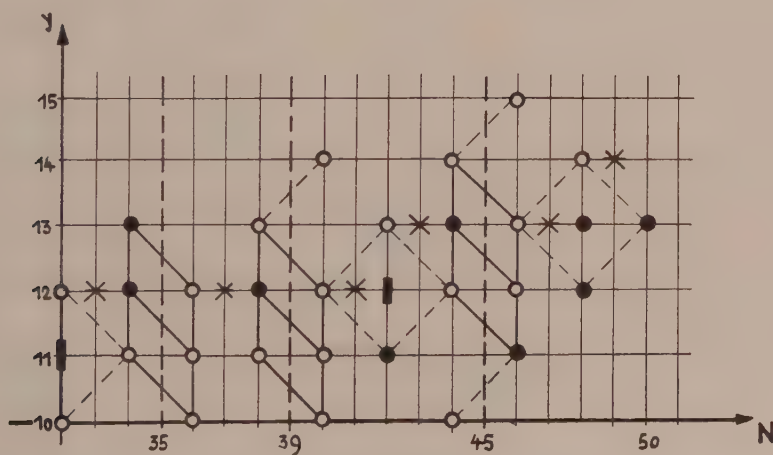


Abb. 2. Die instabilen Zonen mit $N = 35, 39$ und 45 im $y = f(N)$ -Diagramm. Analoges gilt für die übrigen instabilen Zonen.

a) Rechts und links von der instabilen Zone liegen übereinander auf derselben Ordinate mindestens drei ○- bzw. ●-Kerne.

b) Jede instabile Zone ist rechts und links von einem ✕-Kern, mit $y = \text{konstant}$, umgeben.

c) Die Reinelemente liegen in der Mitte der Elementar-Aufbauzelle des $y = f(N)$ -Diagramms (s. Abb. 3).

Die Lage der Reinelemente und der ○-, ●-Kerne im $y = f(N)$ -Diagramm ist ausnahmslos gesetzmäßig [s. Abb. 4, Tafel].

Bei den „magischen“ Neutronenzahlen $N = 20, 28, 32, 50, 82$ und 126 treten deutliche Sprünge auf. Innerhalb der 1. und 2. Zwischenperiode sowie der II. und III. Hauptperiode verläuft die Verbindungslinie der Reinelemente mit $y = \text{konstant}$.

Abb. 3. Die Lage eines Reinelements in der Elementar-Aufbauzelle im $y = f(N)$ -Diagramm.

3. Die Elementar-Aufbauzelle im $y = f(N)$ -Diagramm läßt vermuten, daß ein diesem Aufbauelement entsprechender Kernkörper hochstabil sein wird. Dieser „hochstabile Kernkörper“ hat den Aufbau:

$$1\mathbb{K} = 4\mathbb{f} = 4(n_0^2 p_1^1) = N_8 P_4. \quad (2)$$

Die Elementarzelle des $y = f(N)$ -Diagramms besitzt (s. Abb. 3):

$$4_N K_Z^M = 4[x\mathbb{f} + y p] = x \cdot 4\mathbb{f} + 4 y \cdot p = x \cdot \mathbb{K} + 4 y \cdot p. \quad (3)$$

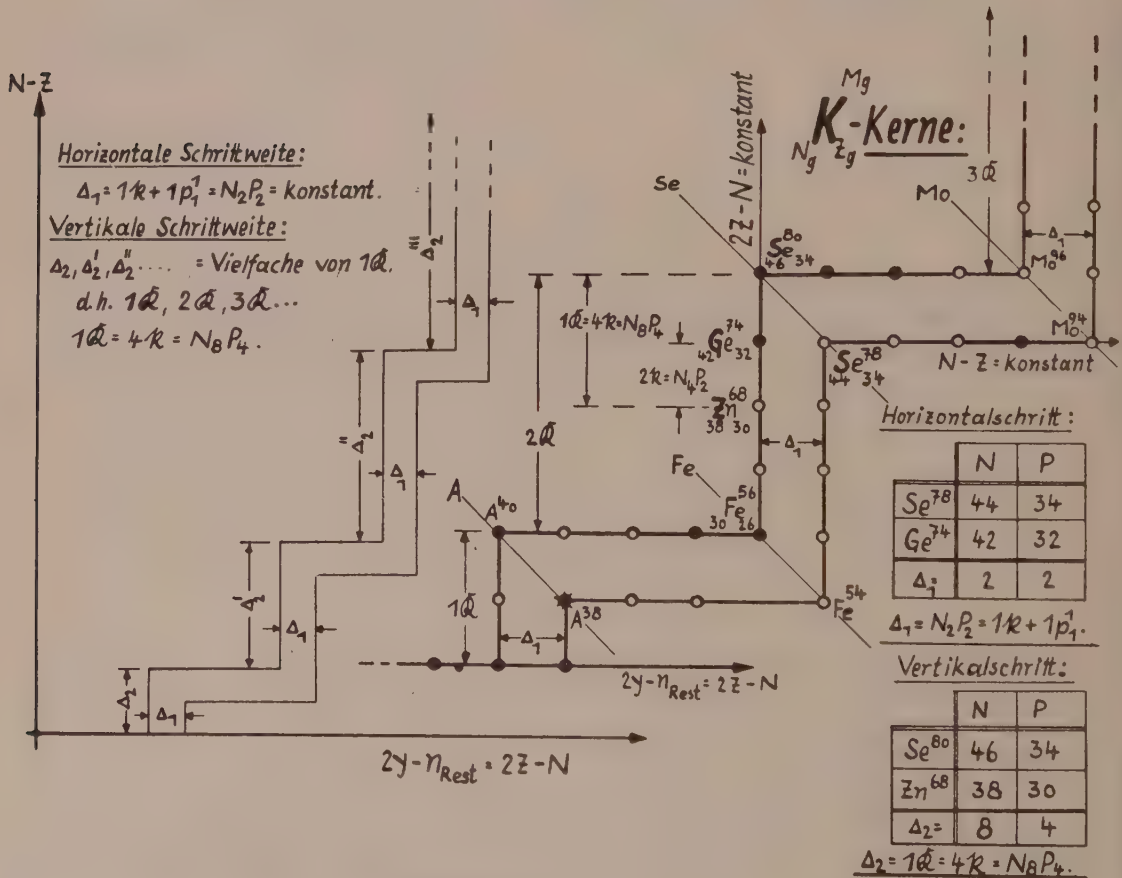


Abb. 6 (schematisch). Aufbauschritte im $(N - Z) = f(2y - n_{\text{Rest}})$ -Diagramm.

Das $y=f(N)$ -Diagramm

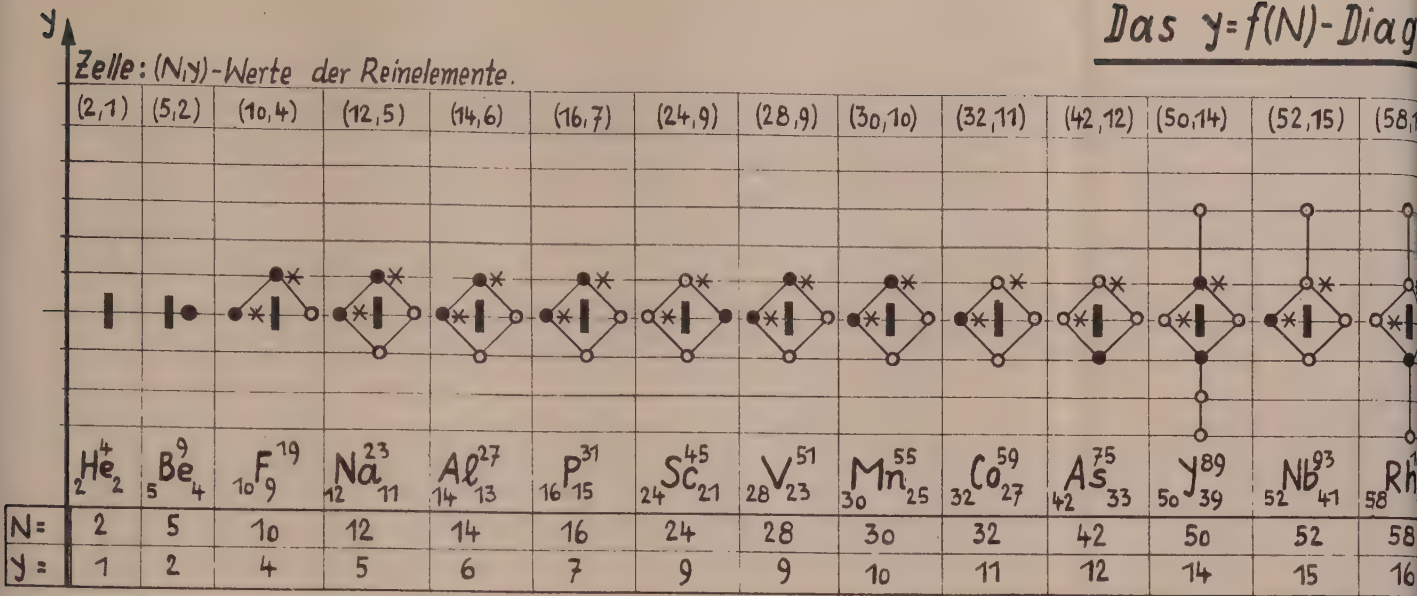
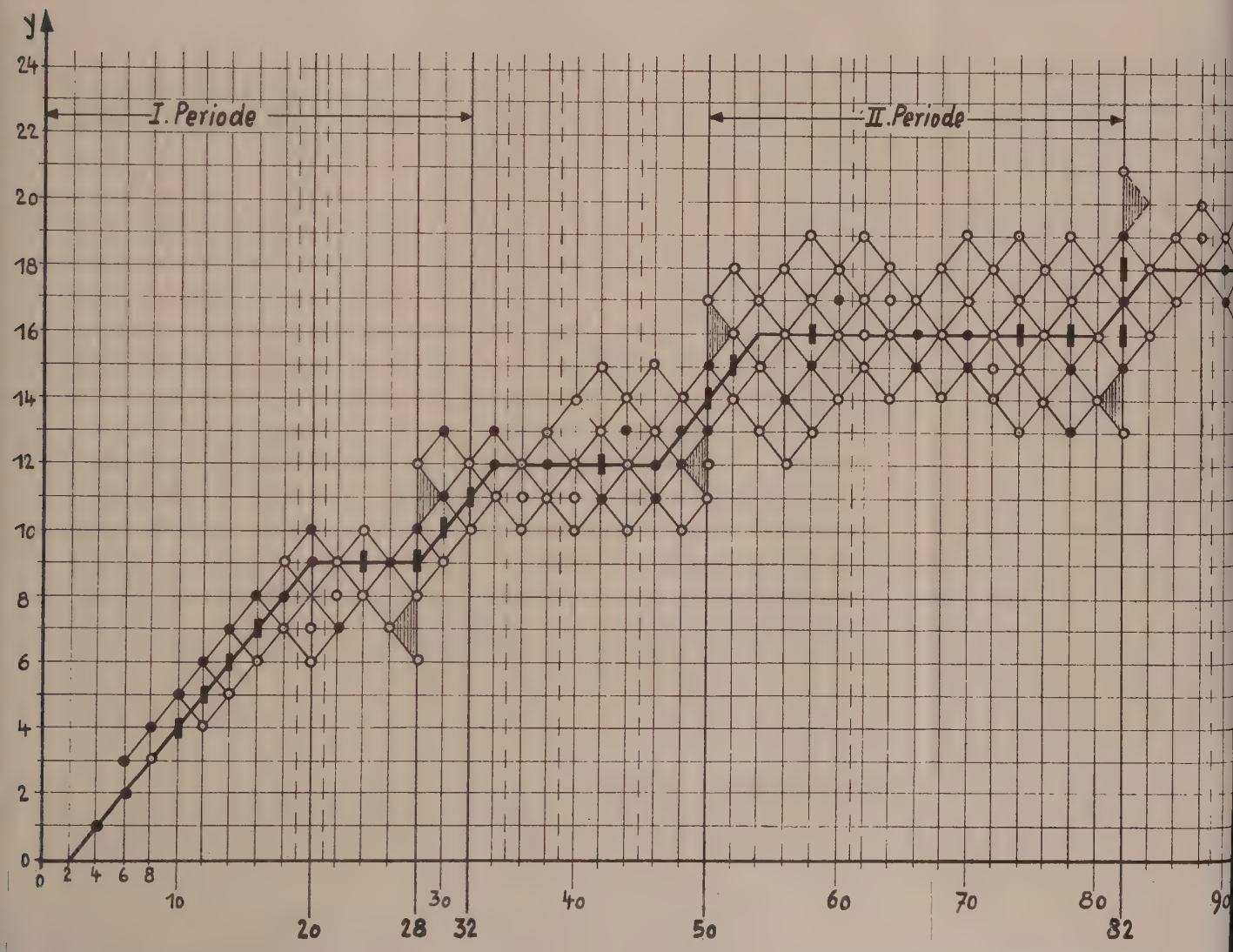
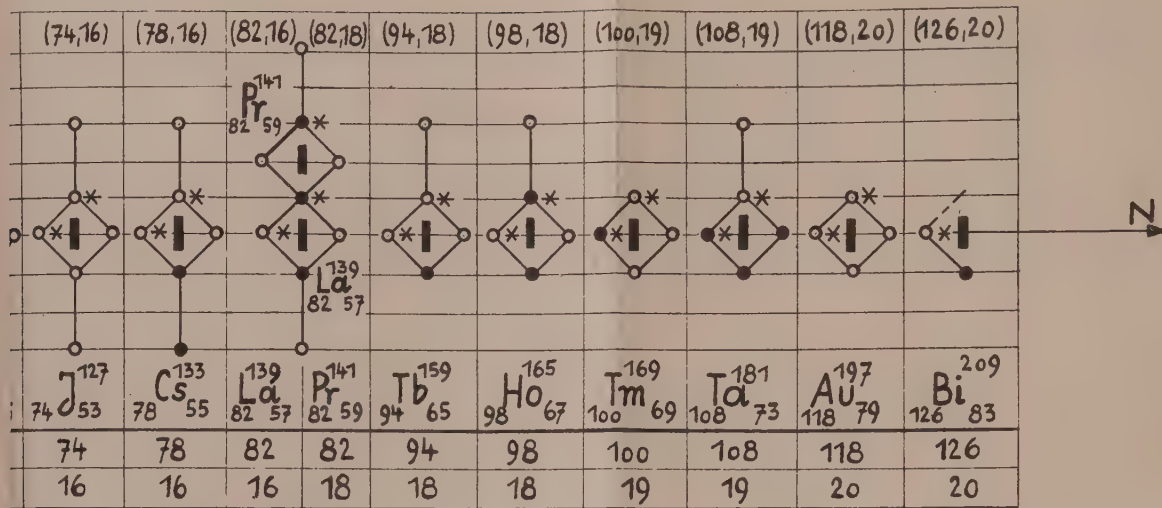


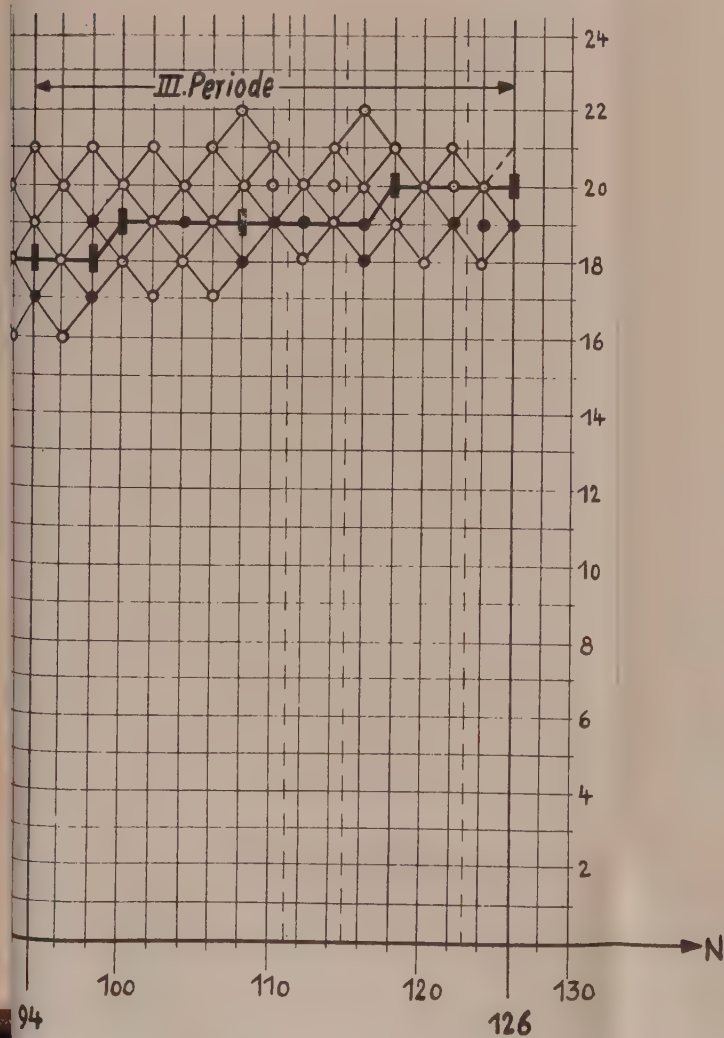
Abb. 4. Die Umgebung der Reinelemente



2mm.



$y = f(N)$ -Diagramm



me im $y = f(N)$ -Diagramm

Der Kernkörper $1\bar{8} = 4\bar{f}$ beherrscht den gesamten Aufbau des $y = f(N)$ -Diagramms (s. Abb. 5, Tafel).

Die Folgerung, daß der Kernkörper $1\bar{8} = 4\bar{f}$ hochstabil sein muß, wird auch erhärtet durch die Lage der ${}_{N_u}K_{Z_9}^{Mu-}$, ${}_{N_9}K_{Z_u}^{Mu-}$ und ${}_{N_9}K_{Z_9}^{M_9}$ -Kerne im $(N-Z) = f(2Z-N) = f(2y - n_{\text{Rest}})$ -Diagramm (s. Abb. 6).

Literaturverzeichnis.

- R. A. Alpher: A neutron capture theory of the formation and relative abundance of the Elements. *Physic. Rev.* **74**, 1579—1580 (1948).
- L. Davis, B. T. Feld, C. W. Zabel and J. R. Zacharias: The hyperfine structure and nuclear moments of the stable chlorine isotopes. *Physic. Rev.* **76**, 1076—1085 (1949).
- L. Davis, D. E. Nagle and J. R. Zacharias: Atomic beam magnetic resonance experiments with radioactive Elements Na^{23} , K^{40} , Cs^{135} and Cs^{137} , *Physic. Rev.* **76**, 1068—1075 (1949).
- C. B. Ellis: On closed shells in nuclei. *Physic. Rev.* **74**, 1547 (1948).
- E. Feenberg: Nuclear shell structure and isomerism. *Physic. Rev.* **76**, 320—322 (1949).
- W. Gordy: Relation of nuclear quadrupole moment to nuclear shell structure. *Physic. Rev.* **76**, 139—140 (1949).
- J. H. E. Griffiths: *Proc. Roy. Soc. (London)* **170**, 513 (1939).
- W. D. Harkins: The effect of nuclear shells upon the Pattern of the atomic species. *Physic. Rev.* **76**, 1538—1540 (1949).
- W. D. Harkins and M. Popelka: The existence of stable nuclei as related to the principle of regularity and continuity of series and the ends of nuclear shells. *Physic. Rev.* **76**, 989—991 (1949).
- O. Haxel, J. H. D. Jensen and H. E. Suess: On the "Magic Numbers" in nuclear structure. *Physic. Rev.* **75**, 1766 (1949).
- R. D. Hill: Nuclear quadrupole moments and shell structure. *Physic. Rev.* **76**, 998 (1949).
- D. J. Hughes, W. D. B. Spatz and N. Goldstein: Capture cross sections for fast neutrons. *Physic. Rev.* **75**, 1781—1787 (1949).
- D. N. Kundu and M. L. Pool: The (H^3, p) -reaction in Rh and Co and probable evidence of the Di-neutron. *Physic. Rev.* **73**, 22—26 (1948).
- — — Introduction of two neutrons into atomic nuclei under H^3 bombardement. *Physic. Rev.* **73**, 1220—1221 (1948).
- J. Mattauch und S. Flügge: *Kernphysikalische Tabellen*. Berlin: Springer-Verlag. 1942.
- M. G. Mayer: Closed shells in nuclei. *Physic. Rev.* **76**, 185 (1949).
- On closed shells in nuclei, II. *Physic. Rev.* **75**, 1969—1970 (1949).
- On closed shells in nuclei. *Physic. Rev.* **74**, 235—239 (1948).
- O. Monecke: Ein Beitrag zum Problem der Struktur des Atomkerns: der $N_8 P_4$ -Körper. *Experientia* **5**, 440—443 (1949).
- Eine neue Gesetzmäßigkeit in der Häufigkeitsverteilung der Isotope: der N_4 -Effekt. *Experientia* **5**, 232—235 (1949).
- L. W. Nordheim: On spins, moments and shells in nuclei. *Physic. Rev.* **75**, 1894—1901 (1949).
- H. L. Poss: On the magnetic moments of C^{13} , F^{19} , Tl^{203} and Tl^{205} . *Physic. Rev.* **75**, 600—606 (1949).
- W. G. Proctor: The magnetic moments of Sn^{117} , Sn^{119} and Pb^{207} . *Physic. Rev.* **76**, 684 (1949).
- D. Saxon and J. Richards: The beta-spectrum of Tl^{204} , magic numbers and neutron pairing. *Physic. Rev.* **76**, 982—983 (1949).
- T. Schmidt: *Naturwiss.* **28**, 565 (1940).
- E. Segrè and A. C. Helmholtz: Nuclear isomerism. *Rev. mod. Physics* **21**, 271—304 (1949).
- D. F. Sherman, D. J. Hughes and J. R. Wallace: Fast neutron cross sections and nuclear shell structure. *Physic. Rev.* **76**, 188 (1949).
- H. Taub and P. Kusch: The magnetic moment of the proton. *Physic. Rev.* **75**, 1491 (1949).
- C. H. Townes, H. M. Foley and W. Low: Nuclear quadrupole moments and nuclear shell structure. *Physic. Rev.* **76**, 1415—1416 (1949).
- J. R. Zimmermann and D. Williams: Nuclear gyromagnetic ratios of Be^9 , Rb^{85} , Rb^{87} , Cs^{133} . *Physic. Rev.* **75**, 699 (1949).

(Eingegangen am 30. Juli 1951.)

Über die Temperaturabhängigkeit der Querszahl der Metalle.

Von F. Vitovec, Wien.

Mit 2 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die Temperaturabhängigkeit der Querszahl wird aus Elastizitätsmodul und Kompressionsmodul errechnet. Für die Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls liegen ausreichende Versuchswerte vor. Die Temperaturabhängigkeit des Kompressionsmoduls wird aus der Gitterenergie berechnet. Die Querszahl sinkt mit zunehmender Temperatur, während der Temperaturgradient ansteigt. (Die Querszahl ist der Kehrwert der Poissonschen Zahl.)

Summary. The temperature dependence of Poisson's ratio is computed from the modulus of elasticity and the compressibility. Sufficient experimental data exist for the temperature dependence of the modulus of elasticity. The temperature dependence of the compressibility is computed from the lattice energy. Poisson's ratio and the temperature gradient rises when the temperature is increasing.

Résumé. La variation thermique du coefficient de Poisson est calculée du module d'élasticité et du module de compression. Pour la variation thermique du module d'élasticité il existe des valeurs d'essai suffisantes. La variation thermique du module de compression est calculée de l'énergie de réseau. Le coefficient de Poisson et le gradient de température montent avec la température qui augmente.

Sämtliche Elastizitätskoeffizienten sind von Temperatur und Druck abhängig. Bei ein- und zweiachsigen Belastungen wird schon bei verhältnismäßig geringen Spannungen die Elastizitätsgrenze erreicht und es überlagern sich plastische Verformungen¹. Die rein elastischen Verformungen sind daher im allgemeinen gering. Aus diesem Grunde können in diesem kleinen Verformungsbereich die Elastizitätskoeffizienten mit großer Annäherung als konstant angesehen werden und das Hooke'sche Linearitätsgesetz gilt. Die durch Temperaturänderungen entstehenden Raum-inhaltsänderungen übersteigen jene, welche durch mechanische Beanspruchung in den üblichen Belastungsarten hervorgerufen werden, ganz beträchtlich, weshalb die elastischen Eigenschaften der Stoffe mit der Temperaturänderung in keinem linearen Zusammenhang stehen.

Die versuchstechnische Ermittlung der Elastizitätskonstanten ist bei höheren Temperaturen sehr schwierig, da die Elastizitätsgrenze mit zunehmender Temperatur sehr stark absinkt. Erst das von F. Förster² entwickelte Verfahren, das die Ermittlung des Elastizitätsmoduls mit Hilfe von Schwingungen kleiner Amplitude bei sehr kleinen Spannungen ermöglicht, gestattete die Bestimmung des Elastizitätsmoduls über einen sehr großen Temperaturbereich. Umfassende Untersuchungen über die Temperaturabhängigkeit wurden in neuerer Zeit von W. Köster³ nach diesem Verfahren ausgeführt.

Ebenso wie der Elastizitätsmodul ist auch die Querszahl von der Art der Gitterbindung und vom Aufbau des Stoffes abhängig. Sie wird ebenfalls von Druck und Temperatur beeinflusst. Unter der Querszahl m wird im folgenden das Verhältnis von Längsdehnung ε zu Querschrumpfung ε_q verstanden. Ihr Kehrwert ist die Poissonsche Konstante μ .

¹ F. Vitovec: Über die Größe der Querszahl bei überelastischer Verformung. Schweiz. Arch. 16, 85—87 (1950).

² F. Förster: Ein neues Meßverfahren zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls und der Dämpfung. Z. Metallkunde 29, 109—115 (1937).

³ W. Köster: Die Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls reiner Metalle. Z. Metallkunde 39, 1—9 (1948). Über eine Sondererscheinung im Temperaturgang von Elastizitätsmodul und Dämpfung der Metalle Kupfer, Silber, Aluminium und Magnesium. Z. Metallkunde 39, 9—12 (1948). Betrachtungen über den Elastizitätsmodul der Metalle und Legierungen. Z. Metallkunde 39, 145—160 (1948).

Ungleich schwieriger noch als der Elastizitätsmodul ist die Querszahl versuchsmäßig zu bestimmen. Aus diesem Grunde liegen über die Temperaturabhängigkeit der Querszahl nur sehr wenige Versuchsergebnisse und nur in einem kleinen Temperaturbereich vor. Für elastizitätstheoretische Berechnungen ist jedoch die Kenntnis der Querszahl bei höheren Temperaturen von wesentlicher Bedeutung, da sich naturgemäß mit der Temperatur auch der Spannungszustand in einem Konstruktionsteil ändert.

Bereits 1902 entwickelte Cl. Schaefer⁴ eine Formel, welche die Poissonsche Konstante μ als Funktion der Temperatur und der Temperaturkoeffizienten des Dehnungs- und Gleitmoduls α und β darstellt:

$$1 + \mu_t = (1 + \mu_{20}) \frac{1 - \alpha(t - 20)}{1 - \beta(t - 20)}. \quad (1)$$

G. Angenheister⁵ hat jedoch nachgewiesen, daß die lineare Extrapolation nicht zulässig ist und zu falschen Werten führt.

Da nun genaue Messungen über die Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls vorliegen, besteht die Möglichkeit, die Querszahl m für verschiedene Temperaturen aus dem Verhältnis von Elastizitätsmodul E und dem Kompressionsmodul K

$$K = \frac{E}{3} \frac{m}{m - 2} \quad (2)$$

zu ermitteln.

Für die Temperaturabhängigkeit des Kompressionsmoduls liegen ebenfalls wegen versuchstechnischer Schwierigkeiten nur sehr wenige Meßergebnisse und nur für einen kleinen Temperaturbereich vor. Es besteht jedoch die Möglichkeit, die Temperaturabhängigkeit des Kompressionsmoduls auf Grund der durch Temperaturänderung hervorgerufenen Rauminhaltsänderung aus der Gitterenergie zu berechnen.

Bekanntlich kann man unter gewissen Voraussetzungen auch für Metalle die Gitterenergie U_G durch eine Beziehung von der Form

$$U_G = -\frac{A}{V^{1/3}} + \frac{B}{V^{n/3}} \quad (3)$$

darstellen, wobei A , B und n Konstante sind. Für Metalle kann im Mittel $n = 3$ gesetzt werden⁶. Die Konstante B läßt sich aus der Bedingung eliminieren, daß im Gleichgewichtsfalle ($V = V_0$) die Gitterenergie ein Minimum besitzt:

$$B = \frac{A}{n} V_0^{\frac{n-1}{3}}. \quad (4)$$

Weiters ist der Kompressionsmodul

$$K = V \left(\frac{d^2 U_G}{dV^2} \right). \quad (5)$$

Setzt man für die Volumenänderung v

$$v = \frac{V}{V_0} - 1, \quad (6)$$

so ergibt sich für den Kompressionsmodul K aus den Gleichungen (3) bis (6):

$$K = -\frac{A}{V_0^{4/3} (v + 1)^{4/3}} \left[\frac{4}{9} - \frac{1}{3} \left(\frac{n}{3} + 1 \right) \left(\frac{1}{v + 1} \right)^{\frac{n-1}{3}} \right]. \quad (7)$$

⁴ Cl. Schaefer: Über die Elastizitätszahlen einiger Stoffe mit niedrigem Schmelzpunkt. Drudes Ann. 9, 1124—1127 (1902).

⁵ G. Angenheister: Beiträge zur Kenntnis von der Elastizität der Metalle. Drudes Ann. 11, 188—201 (1903).

⁶ Th. Heumann: Zur Berechnung des Abstoßungsexponenten einiger kubischer Metalle aus der thermischen Ausdehnung. Naturwiss. 32, 296—297 (1944).

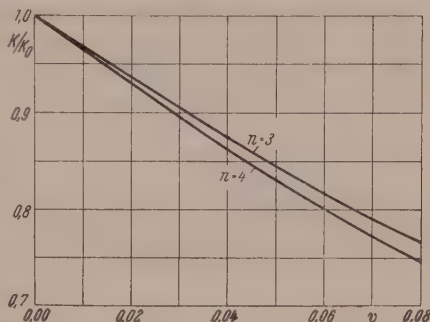


Abb. 1. Kompressionsmodul K in Abhängigkeit von der Rauminhaltsänderung $v = \frac{V}{V_0} - 1$, berechnet nach dem Mieschen Ansatz für $n = 3$ und $n = 4$.

A kann aus dem bekannten Kompressionsmodul bei Raumtemperatur ermittelt werden. Es ist jedoch zu beachten, daß sich bei allotropen Umwandlungen V_0 ändert.

Nach E. Grüneisen⁷ beträgt die gesamte Rauminhaltsänderung infolge Wärmedehnung zwischen dem absoluten Nullpunkt und der Schmelztemperatur für die meisten Metalle etwa 7%. Auf Grund der angegebenen Kurven läßt sich die thermische Aus-

dehnung innerhalb eines beliebigen Temperaturgebietes abschätzen. Damit ist die Möglichkeit gegeben, mit Hilfe von Gl. (7) die Temperaturabhängigkeit des Kompressionsmoduls angenähert zu ermitteln. Entsprechende Werte sind für $n = 3$ und $n = 4$ in Abb. 1 dargestellt.

Es sei im Hinblick auf obige Überlegungen bemerkt, daß der Kompressionsmodul als Funktion der Temperatur (besonders für tiefe Temperaturen) nicht linear extrapoliert werden darf, da die Rauminhaltsänderung keine lineare Funktion der Temperatur ist.

Mit Hilfe der nach Gl. (7) angenäherten Ermittlung der Temperaturabhängigkeit des Kompressionsmoduls und der aus Versuchen bekannten Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls ist es nun möglich, die Querszahl für verschiedene Temperaturen nach Gl. (2) zu berechnen.

Als Beispiel ist in Abb. 2 die Querszahl in

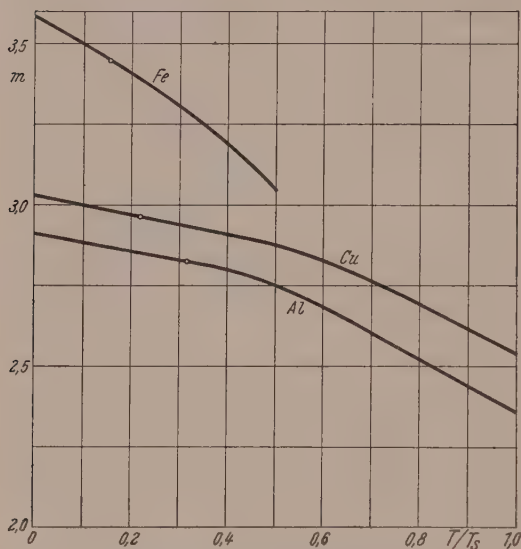


Abb. 2. Querszahl in Abhängigkeit von der Temperatur.

Abhängigkeit von der Temperatur für α -Eisen, Kupfer und Aluminium dargestellt. Die Querszahl sinkt mit ansteigender Temperatur zunächst langsam und fällt erst bei Annäherung an den Schmelzpunkt rasch auf einen Wert größer als 2 ab. In Tab. 1 sind die

Tabelle 1. Querszahl im absoluten Nullpunkt m_0 und bei Schmelztemperatur m_s verschiedener Metalle.

	Al	Mo	W	Ni	Ir	Cu	Ag	Au	Zn	Cd	Sn	Pb	Sb
m_0	3·00	3·28	4·30	3·50	4·00	2·90	3·20	2·40	3·77	3·60	3·25	2·33	3·00
m_s	2·50	2·64	2·75	2·70	3·00	2·35	2·70	2·24	2·90	2·90	2·80	2·15	2·80

Querszahlen einiger Metalle im absoluten Nullpunkt und im Schmelzpunkt eingetragen. Daraus ist ersichtlich, daß, entgegen vielfachen Annahmen, die Querszahl mit sinkender Temperatur weder dem Wert 4 zustrebt noch im Schmelzpunkt gleich 2 wird. Dies war auch vorauszusehen, da bei metallischer Bindung keine Zentralkräfte wirken, wie sie für die Cauchyschen Relationen vorauszusetzen sind und die Metalle im allgemeinen vor dem Schmelzen noch eine Gestaltelastizität besitzen während erst im flüssigen Zustand $m = 2$ ist. Aus dem Verlauf der Temperaturabhängigkeit der Querszahl läßt sich auch auf deren Druckabhängigkeit schließen. Mit Hilfe des Elastizitätsmoduls und der Querszahl kann der Gleitmodul G ermittelt werden. Auf Grund des Verlaufes in Abb. 2 ergibt sich, daß der Gleitmodul mit steigender Temperatur rascher absinkt als der Elastizitätsmodul.

⁷ Vgl. A. Eucken: Grundriß der physikalischen Chemie, 6. Aufl., S. 68. Leipzig: Akad. Verlagsges. 1944.

(Eingegangen am 20. November 1951.)

Eine Röntgenröhre mit Durchstrahlanode zur Sekundärerregung von Röntgenspektren.

Von H. Herglotz, Wien.

Aus dem Institut für Experimentalphysik der Technischen Hochschule Wien.

Mit 8 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Eine Röntgenröhre wird beschrieben, die es bei einfacher Konstruktion und Handhabung gestattet, Röntgenspektroskopie mit Sekundärerregung zu betreiben, ohne die zu untersuchenden Präparate in das Röhreninnere bringen zu müssen. An Hand von einigen Beispielen wird die Wirkungsweise der Röhre erläutert. Die weitere Entwicklung soll einen Weg zur Überwindung der ungerechtfertigten Zurücksetzung der Röntgenspektroskopie gegenüber der optischen weisen.

Summary. An X-ray tube is described which makes it possible, in spite of its simple construction and handling, to carry out secondary emission X-ray spectroscopic work without putting the samples into the interior of the tube. The performance of the tube is explained by means of some examples. Some further explanations are intended to show that the disregard of X-ray spectroscopy against optical spectroscopy is unjustified.

Résumé. On décrit un tube à rayons X qui malgré d'une construction et maniement simple permet de faire de la spectroscopie à rayons X, avec émission secondaire, sans être obligé de mettre dans l'intérieur du tube les spécimens qui sont à examiner. Moyennant quelques exemples on explique le fonctionnement du tube. Finalement, on montre que le passe-droit de la spectroscopie à rayons X devant la spectroscopie optique n'est pas justifié.

Die Röntgenspektroskopie bedient sich häufig der Fluoreszenzerregung, hauptsächlich dann, wenn das zu untersuchende Präparat unter dem Elektronenbombardement bei Primärerregung leiden würde. Die mit der Sekundärerregung verbundene beträchtliche Verlängerung der Belichtungszeiten wiegt den Vorteil, daß im Präparat keine schädliche Wärmeentwicklung auftritt, besonders bei empfindlichen Präparaten, nicht auf. Den Intensitätsverlust bei der Fluoreszenzspektroskopie möglichst gering gemacht und so an Belichtungszeit gewonnen zu haben, ist das Verdienst von v. Hevesy und Mitarbeitern^{1,2}.

Unangenehm wird vom Experimentator empfunden, daß die zu untersuchenden Substanzen sowohl bei primärer wie sekundärer Erregung der Röntgenspektren in das Hochvakuum der Röhre gebracht werden müssen, wodurch sich Substanzen mit höherem Dampfdruck automatisch von der Untersuchung ausschließen. Glocker und Schreiber^{3,4} haben, um diesem Mangel zu begegnen, ein Verfahren der Erregung in Luft entwickelt.

Am Institut erschien es für die Bearbeitung gewisser Probleme ebenfalls zweckmäßig, das charakteristische Spektrum in Luft außerhalb der Röhre zu erregen. Damit der Anodenbrennfleck so nahe als nur möglich an das Präparat, dessen Röntgenspektrum untersucht werden soll, herankommt, wurde das Aluminiumfenster der Röhre selbst als Anode ausgebildet.

Für informative Vorversuche diente eine Seemann-Universalröhre mit Lenardfenster, die von H. Seemann auch schon zur Erregung in Luft herangezogen worden war⁵. Nach den hierbei gewonnenen Erfahrungen wurde dann die neue Röhre kon-

¹ G. v. Hevesy, J. Böhm und A. Faessler: Z. Physik **63**, 74 (1930), daselbst weitere Literatur.

² E. Alexander und A. Faessler: Z. Physik **68**, 260 (1931).

³ R. Glocker und H. Schreiber: Ann. d. Phys. [4] **85**, 1089 (1928).

⁴ H. Schreiber: Z. Physik **58**, 619 (1929).

⁵ Mitteilungen des Seemannlaboratoriums Nr. 24 und 39.

struiert und in der Institutswerkstätte hergestellt. Der Aufbau der Röhre ist aus der Konstruktionszeichnung (Abb. 1) ersichtlich, während Abb. 2 die Röhre neben der oben erwähnten Seemannröhre mit Lenardfenster zeigt.

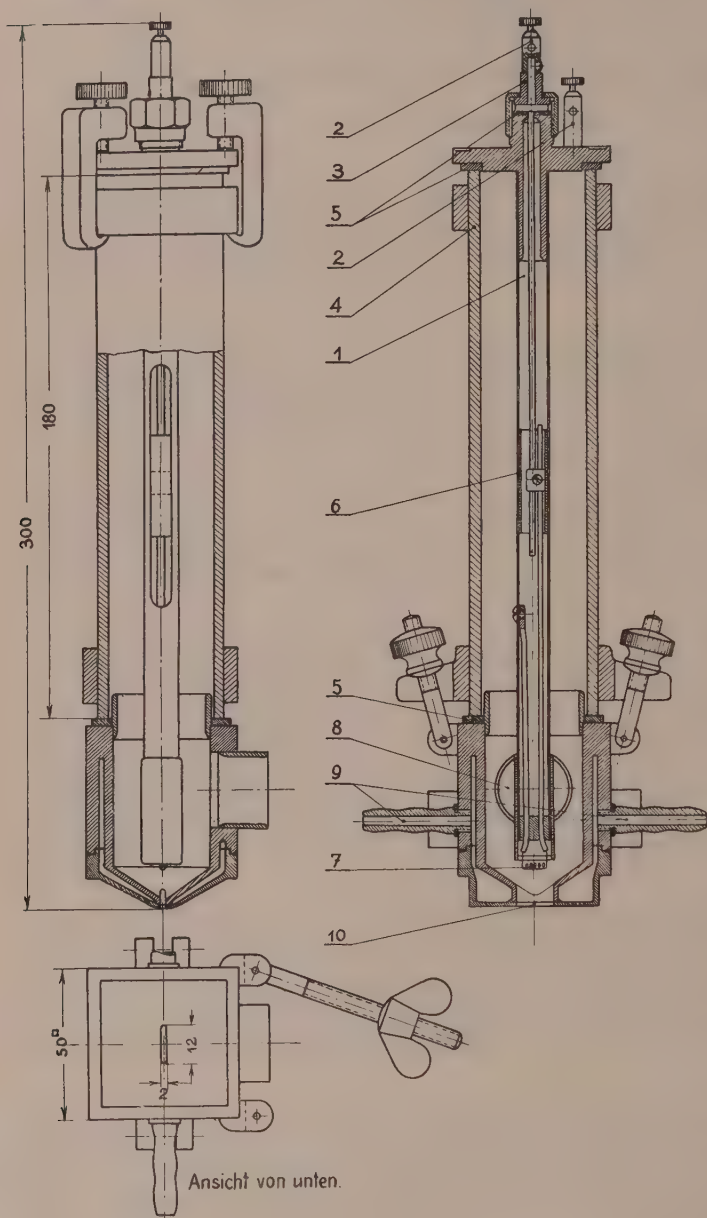


Abb. 1. Röhre mit Durchstrahlanode. 1 Kathodenrohr, 2 Anschlußklemmen, 3 Durchführungsisolator, 4 Glaszylinder, 5 Gummidichtungen, 6 Isolierrohr, 7 Heizwendel, 8 Pumpenanschluß, 9 Kühlwasseranschlüsse, 10 Anodenschlitz.

Folie vor Überhitzung bewahrt und verträgt einen Strom von 10 mA bei 25 kV mehrere Stunden, ohne durchzuschmelzen. Es muß allerdings erwähnt werden, daß nicht der gesamte, am Milliampereometer abgelesene Strom für die Erzeugung der Röntgenstrahlung zur Verfügung stehen muß, sondern daß vielmehr je nach der Form des Kathodenstrahlbündels ein Teil der Elektronen die Innenwände des Röhrenfußes statt den Schlitz

Die Abmessungen wurden bedeutend kleiner gewählt als bei ihrem Vorbild, der Seemannröhre, entsprechend dem Charakter der Spezialröhre gegenüber der Universalröhre. Dieses Bestreben, die Röhre klein zu halten, wurde nach unten begrenzt durch die Funkenschlagweite zwischen Kopf und Fuß der Röhre. Der Röhrenfuß trägt an seiner zylindrisch gewölbten Stirnseite eine schlitzförmige Öffnung von 2 mm Breite und 12 mm Länge, an den Seitenwänden sind der Stutzen zum Anschluß an die Pumpe und die Kühlwasseranschlüsse angebracht. Der Röhrenfuß ist hohl und wird vom Kühlwasser durchflossen. Über den Schlitz an der Stirnseite wird eine Aluminiumfolie gezogen, die auf der polierten Fläche satt aufliegt. Nur die Randzone ist zur Befestigung mit Zaponlack bestrichen (Abb. 3), wodurch einmal verhindert wird, daß Lösungsmitteldämpfe vom Zaponlack leicht in das Röhreninnere gelangen und das Vakuum verschlechtern; zum anderen wird in der Umgebung des Schlitzes ohne dazwischenliegenden wärmeisolierenden Zaponlack ein besserer Wärmeaustausch zwischen Folie und gekühltem Röhrenfuß erreicht. So bleibt die

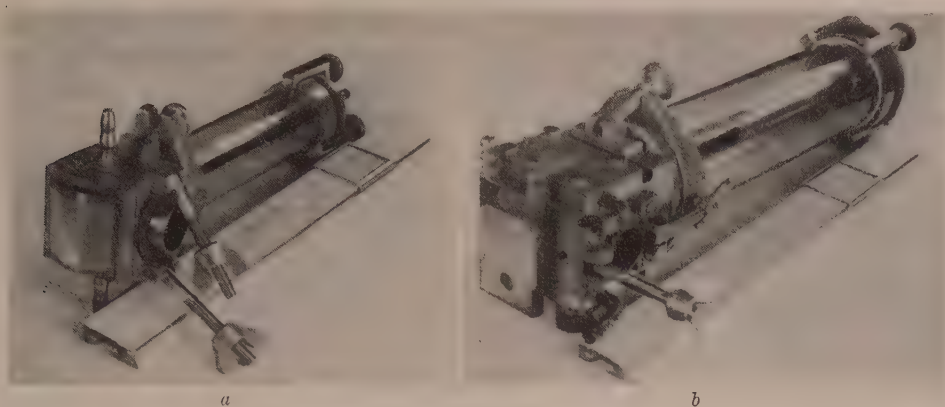
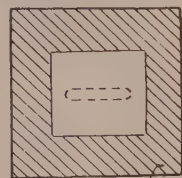


Abb. 2. Röhre mit Durchstrahlanode *a* und Seemannröhre mit Lenardfenster *b*.

treffen kann. Die Innenseite der bei diesen Versuchen meist 20μ dicken Folie war vorher mit einer etwa 0.3μ dicken Kupferschicht bestäubt worden. 0.3μ ist die ungefähre Grenzdicke von Kupfer für 25-kV-Elektronen⁶ (25 kV war die häufigste Betriebsspannung der Anlage), in der also praktisch alle Elektronen absorbiert werden und die entstehende charakteristische Strahlung ein Maximum sein muß. Allerdings wird die austretende Intensität infolge der Absorption innerhalb der Kupferschicht nicht optimal sein. Dies spielt aber in unserem Fall keine Rolle, da das Aufstäuben einer Kupferschicht von genau anzugebender Dicke ohnedies nicht möglich war. Der Intensitätsverlust in der Aluminiumträgerfolie ist wegen des geringen Absorptionskoeffizienten des Aluminiums für Kupferstrahlung nicht allzu erheblich; die mit $J(0)$ bezeichnete, aus der Kupferschicht austretende Kupferstrahlung wird gemäß

$$J(x) = J(0) \cdot e^{-\mu x}, \quad \begin{aligned} \mu &= \text{Absorptionskoeffizient} \\ &= 124.2 [\text{cm}^{-1}] \text{ für } \lambda = 1.5 \text{ \AA}^7 \\ x &= 2 \cdot 10^{-3} \text{ cm,} \end{aligned}$$

um den Faktor 0.78 geschwächt.



Lackschicht

Abb. 3.
Befestigung der
Aluminiumfolie
über dem Ano-
denschlitz.

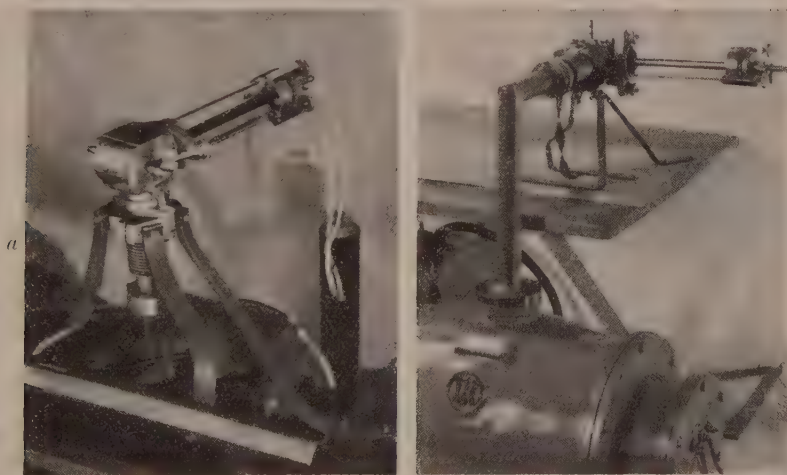


Abb. 4. Röhre mit Durchstrahlanode *a* an der Drehchieberpumpe, *b* an der Molekularpumpe.

⁶ P. Lenard und A. Becker: Kathodenstrahlen, Handbuch d. Experimentalphysik, S. 132. Leipzig 1927.

⁷ M. Siegbahn: Spektroskopie der Röntgenstrahlen, S. 469. Berlin: Julius Springer. 1931.

Bei Röhren mit Spiegelanode muß man gleichfalls eine Schwächung in Kauf nehmen, da auch hier die Strahlung durch ein Fenster nach außen gelangen muß.

Die Röhre wurde nach dem Vorbild von H. Stintzing⁸ mit einer zweistufigen Drehschieberpumpe betrieben (Firma Edwards, London, angegebenes Endvakuum $1 \cdot 10^{-4}$ mm Hg), wobei nach 20 Minuten Betrieb Sperrvakuum für 50 kV erreicht

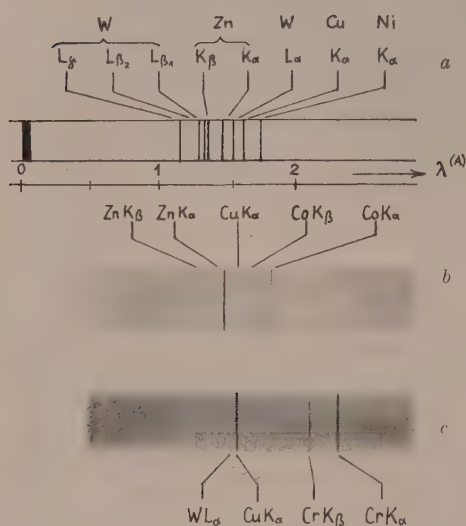


Abb. 5. a) Durchschnittliche Zusammensetzung der von der Anode ausgehenden Strahlung. Kopien von Fluoreszenzspektrogrammen: b) Kobalt mit Zinkstrahlung, c) Chrom mit Kupferstrahlung (Cu K_{β} außerhalb des Schwenkbereichs).

wendung einer Molekularluftpumpe der Firma Trüb, Täuber & Co., Zürich (Abb. 4b) brachte keine Verbesserung des Vakuums und wurde daher wieder fallengelassen. Die kurze und weite Verbindung zwischen Pumpe und Röhre war erforderlich, um das Stutzenvakuum der Pumpe zu erreichen, ein dazwischengeschalteter Hahn hätte diese einfache

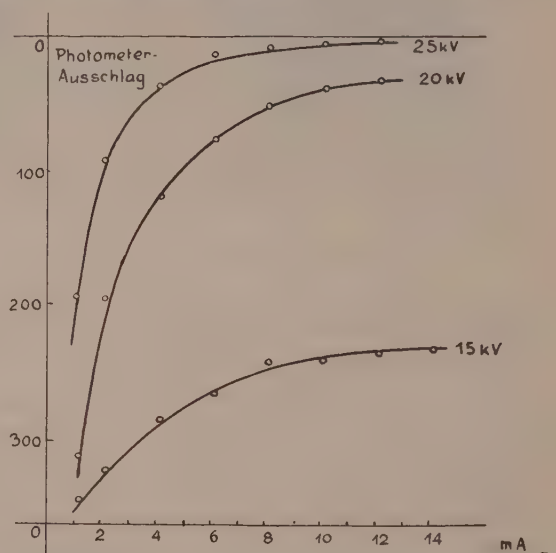


Abb. 6. Filmschwärzung (Photometerausschlag) in Abhängigkeit von Röhrenspannung und -strom.

wurde. Pumpe und Röhre waren nur durch einen kurzen elastischen Tombakschlauch verbunden (Abb. 4a). Die probeweise Ver-

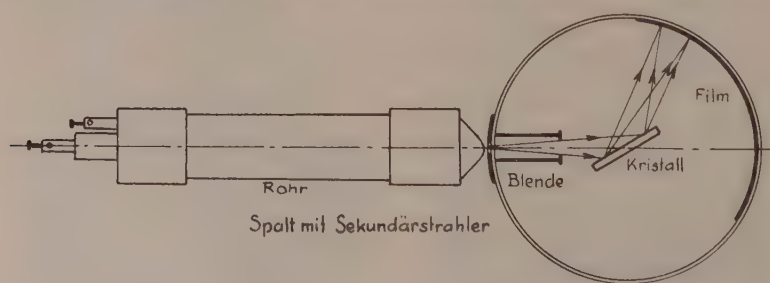


Abb. 7. Schema des Spektrographen mit Röhre.

und zeitsparende Betriebsart der Röhre in Frage gestellt. Die Pumpe enthält ein Rückschlagventil, das ein Zurücksteigen von Öl in das Vakuum der Röhre nach dem Abschalten verhindert. Vor dem Öffnen der Röhre wurden die Halteschrauben für den Glaszylinder am Röhrenfuß gelöst und durch Ziehen an dem Gummidichtungsring wie bei einem Einsiedeglas Luft eingelassen.

⁸ H. Stintzing: Ergebn. techn. Röntgenkunde, Bd. III, S. 98—110. Leipzig 1933.

Nach mehrstündigem Betrieb sank die Intensität der austretenden Strahlung, wohl infolge des Anwachsens der Anodenschicht, stark ab. Es mußten daher die Folien öfter erneuert werden, was keinerlei Schwierigkeiten bereitete. Das Auftreten von Zinklinien deutete auf eine Zerstäubung oder Verdampfung des messingnen Wehneltzylinders hin. In den weiteren Versuchen wurden die Folien nicht mehr vor dem Aufziehen mit Kupfer bestäubt, sondern die Schicht, die sich infolge des Zerstäubens bzw. Verdampfens des Wehneltzylinders bildete und in der Zink vorherrschend war, als Anodenschicht benützt.

Die durchschnittliche Zusammensetzung der von der Durchstrahlanode ausgehenden Strahlung zeigt schematisch Abb. 5a, auf der auch die schwächsten, auf Reproduktionen nicht sichtbaren Linien eingetragen sind (Abb. 5b und c sind Kopien von Fluoreszenzspektrogrammen).

Zur Feststellung der wirtschaftlichsten Arbeitsweise wurden mit der aus der Anode austretenden Strahlung Schwärzungsmarken bei verschiedenen Betriebsbedingungen (Strom, Spannung) aufgenommen und photometriert. Das Ergebnis ist in Abb. 6 wiedergegeben. Daß die Kurven bei höherer Spannung zusammenrücken, liegt wohl sowohl an dem Gesetz für die Intensitätsabhängigkeit von der Spannung bei der Erregung charakteristischer Strahlung⁹ als auch am Schwärzungsgesetz, das hier nicht mehr linear ist.

Die Verwendbarkeit der Röhre zur Fluoreszenzanregung wurde auf folgendem Wege erprobt:

Eine große Siemens-Debye-Kamera (Durchmesser des Filmkreises = 114,6 mm) wurde durch wenige Handgriffe in einen Bragg-de-Broglie-Spektrographen mit Steinsalz als Kristall und einem Filmkreis von 160 mm Durchmesser verwandelt. Der Spalt des Spektrographen wurde mit Filtrierpapier bedeckt, in dem die anzuregenden Substanzen als Lösungen bekannter Konzentration aufgesaugt und dann getrocknet worden waren. In so hergestellten Sekundärstrahlern war eine einigermaßen homogene Verteilung der Substanzen anzunehmen und zudem konnte eine „Konzentration“ des zu untersuchenden Elements in Gramm pro Quadratzentimeter Filtrierpapier angegeben werden. Die Röhre wurde dem Spektrographen bis auf 1 mm Abstand Anode—Spalt genähert. Abb. 7 gibt die Anordnung schematisch wieder. Als Präparate dienten CrO_3 , $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$, $\text{MnCl}_2 \cdot 4 \text{H}_2\text{O}$, $\text{FeSO}_4 \cdot 7 \text{H}_2\text{O}$ und $\text{Co}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$.

Die Aufnahmedaten betragen bei den meisten Aufnahmen:

25 kV Röhrenspannung,

10 mA Röhrenstrom,

20° Kristallschwenkbereich,

0,2 mm Spaltbreite,

1^h Expositionszeit.

Verwendeter Film: Schleußner Doneo.

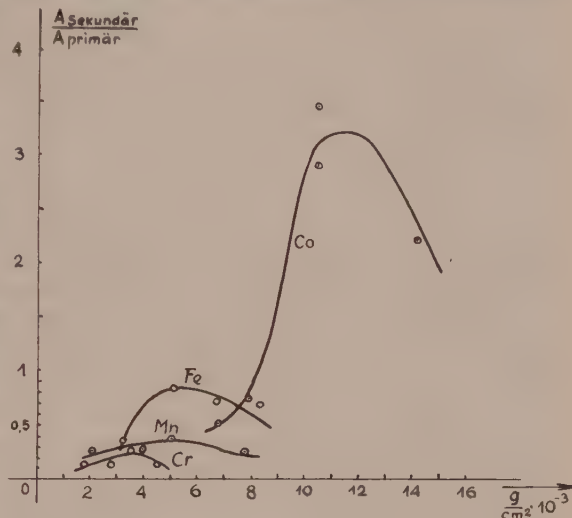


Abb. 8. Quotient aus den Photometerausschlägen des $\text{K}\alpha$ -Dubletts verschiedener sekundär erregter Elemente und des primären $\text{Zn-K}\alpha$ -Dubletts (beide unaufgelöst) in Abhängigkeit von der „Konzentration“ des sekundär erregten Elements.

⁹ M. Siegbahn: Spektroskopie der Röntgenstrahlen, S. 150ff. Berlin: Julius Springer. 1931.

Die Aufnahmen wurden mit einem Mikrophotometer der Firma Hilger, London, photometriert und der Quotient $\frac{A_{\text{sekundär}}}{A_{\text{primär}}}$, das heißt Photometerausschlag des unaufgelösten $K\alpha$ -Dubletts des sekundär erregten Elements zu dem des primären unaufgelösten $ZnK\alpha$ -Dubletts als Funktion der „Konzentration“ des Präparats in g/cm^2 (siehe weiter oben) aufgetragen.

Abb. 8 zeigt die Ergebnisse. Optimale Anregung ist, wie zu erwarten, beim Kobalt, dessen Absorptionskante der anregenden Strahlung am nächsten liegt¹⁰, festzustellen. Ebenfalls war vorherzusehen, daß es eine optimale „Konzentration“ des anzuregenden Elements gab, unterhalb dieser wird ein zu großer Teil der primären Strahlung ungenutzt hindurchgehen, bei zu hoher Konzentration dagegen wird die entstandene Fluoreszenzstrahlung stark absorbiert werden. Wegen des Einflusses der Absorption des Präparats auf den Koeffizienten $\frac{J_{\text{sek}}}{J_{\text{prim}}}$ (J = Intensität) ist naturgemäß der Verbindungspartner bzw. Mischungspartner des Elements, das sekundär erregt wird, nicht gleichgültig¹⁰.

Der bei höheren Intensitäten nicht mehr lineare Zusammenhang zwischen Intensität und Photometerausschlag ist nicht ohne Einfluß auf den Quotienten $\frac{A_{\text{sek}}}{A_{\text{prim}}}$. Es erklären sich so die großen Abweichungen vom wahrscheinlichen Kurvenverlauf. Den eingezeichneten Kurven kommt aus diesem Grund und da sie zudem nur auf wenigen Meßpunkten beruhen, nur halbquantitativer Charakter zu.

Es ist beabsichtigt, in einer folgenden Mitteilung über die Weiterentwicklung der Anlage sowie über weitere Anwendung der Durchstrahlanodenröhre zu berichten.

Meinem verehrten Lehrer, Prof. Dr. F. Regler, möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit, für sein stets förderndes Interesse und seine Unterstützung in apparativer Hinsicht ergebenst danken.

Die Arbeit wurde unter dankenswerter Mitwirkung des Herrn Josef Jusko durchgeführt.

¹⁰ G. v. Hevesy, J. Böhm und A. Faessler, l. c.

(Eingegangen am 16. November 1951.)

Buchbesprechungen.

Adhesion and Adhesives. Herausgegeben von N. A. de Bruyne und R. Houwink. Mit 205 Textabb., XV, 517 S. New York-Amsterdam-London-Brüssel: Elsevier Publishing Company. 1951. Geb. 70s.

Die Herausgabe des vorliegenden Handbuches über „Haften und Haftmittel“ entspricht einem seit langem empfundenen Bedürfnis nach einer wissenschaftlich fundierten, zusammenfassenden Darstellung des so wichtigen Fachgebietes. Die Herausgabe der umfassenden Schrift wurde durch die Mitarbeit zahlreicher Fachleute ermöglicht, welche die ihrem besonderen Fachgebiet entsprechenden Abschnitte verfaßt haben.

Der erste Teil beginnt mit den allgemeinen Bedingungen für das Anfeuchten und Haften. Die Haftfestigkeit ist grundsätzlich bedingt durch die molekularen Kräfte. Diesen ist ein besonderer Abschnitt gewidmet. Von wesentlicher Bedeutung sind die Fließeigenschaften der Klebmittel sowohl für das Auftragen als auch für die Haftfestigkeit. In diesem Abschnitt werden unter anderem auch die Eigenspannungen sowie der Einfluß der Temperatur besprochen. Einen weiten Raum nimmt das Verhalten der Haftverbindungen bei statischen Beanspruchungen ein. Ausführlich wird auf den Einfluß der unterschiedlichen Eigenschaften von Haftmittel und den zu verbindenden Teilen eingegangen und der wahre Spannungsverlauf bei den verschiedenen Verbindungsarten berücksichtigt. Den verschiedenen Meßverfahren zur Prüfung von Klebverbindungen ist ein gesonderter Abschnitt gewidmet. Hier wird unter anderem ein Verfahren besprochen, bei dem das Klebmittel selbst als photoelastisches Medium dient, so daß die Spannungsverteilung naturgetreu ermittelt werden kann.

Der zweite Teil des Handbuches behandelt vor allem technologische Fragen der verschiedenen Haftmittel. Im Abschnitt über organische Klebstoffe werden naturgemäß jene tierischen,

pflanzlichen und synthetischen Ursprungs getrennt besprochen. In dieser Reihe nimmt Bitumen ein gesondertes Kapitel ein. Dem Umfang und dem Rahmen des Buches entsprechend konnten unter den zahlreichen anorganischen Bindemitteln die hydraulischen nur eine knappe Darstellung erfahren. In diesem Abschnitt nimmt jedoch das Natriumsilikat als Bindemittel einen breiten Raum ein. Auch dem Gummi als Klebstoff und Überzugsmaterial ist ein eigenes Kapitel gewidmet. Dem weitgespannten Begriff des Titels des Buches entsprechend wurde ein besonderer Abschnitt über Lötverbindungen aufgenommen und die chemisch-physikalischen Grundlagen sowie die mechanischen Eigenschaften behandelt. Ein Kapitel über die physikalischen Prüfverfahren zur Untersuchung von Haftmittel und Haftverbindungen bildet den Abschluß.

Das vorliegende Handbuch der durch andere Veröffentlichungen bereits bekannten Herausgeber stellt sowohl in theoretischer als auch in technologischer Hinsicht den gegenwärtigen Stand unseres Wissens auf diesem Gebiete umfassend dar. Der besondere Wert der Darstellung liegt aber vor allem in ihrer kritischen Behandlung. Wo immer Lücken bestehen, wird auf diese entschieden hingewiesen, so daß der Leser nicht nur mit den Ergebnissen des behandelten Gebietes, sondern auch mit seinen zahlreichen Problemen vertraut wird. Dem Wissenschaftler bietet das Buch für die theoretische und experimentelle Forschung wertvolle Anregungen, während die technologische Behandlung des Stoffes dem praktisch tätigen Technologen von großem Wert sein wird.

F. Vitovec und V. Gutmann, Wien.

Tafeln und Tabellen zur Festigkeitslehre. Von *L. Föppl* und *G. Sonntag*. Mit 305 Abb., 138 S. München: R. Oldenbourg. 1951.

Der durch seine Arbeiten auf dem Gebiet der Elastizitäts- und Festigkeitslehre verdienstvolle Verfasser hat in dem vorliegenden Werk die Ergebnisse der neuen Untersuchungen zusammengestellt, die bisher nur in der Zeitschriftenliteratur verstreut zu finden waren. Da gerade diese Untersuchungen für die modernen Bauweisen, besonders im Stahl- und Stahlbetonbau von ausschlaggebender Bedeutung sind, ist durch das Buch von Föppl-Sonntag eine Lücke ausgefüllt worden, die hauptsächlich von den in der Praxis stehenden und mit statischen Arbeiten befaßten Ingenieuren seit Jahren recht schmerzlich empfunden wurde.

Aus dem Inhalt des Werkes seien insbesondere die Kapitel über ungestörte Spannungszustände, Kerbspannungen und Stabilitätsprobleme hervorgehoben. Hierbei haben auch die Einflußflächen von Platten auf Grund der Untersuchungen von A. Pucher Aufnahme gefunden. Nebst dem Grundsätzlichen, das in einer Kennzeichnung der einzelnen Probleme und in einer Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse besteht, wird überall auch die bezügliche Literatur zur Ermöglichung einer weiteren Vertiefung im Gegenstand mitgeteilt.

E. Czitary, Wien.

Die Maxwellsche Theorie in veränderter Formulierung. Von *L. Kneissler*. X, 51 S. Wien: Springer-Verlag. 1949. S 24.—, sfr. 6.60, \$ 1.50, DM 6.—.

Die vorliegende inhaltsreiche theoretische Entwicklung einer veränderten Formulierung der Maxwellschen Theorie geht zurück bis auf das Jahr 1940, in dem die Untersuchungen im „Archiv für Elektrotechnik“ (Berlin), Bd. 34, begonnen wurden. Der Verfasser weist darauf hin, daß die Schwierigkeiten, die bei der Darstellung des magnetischen Feldes bei Vorhandensein ferromagnetischer Stoffe auftraten, die Veranlassung zu diesen Untersuchungen gegeben haben.

Im Anschluß an einen bereits von Maxwell skizzierten Weg wird der Begriff der magnetischen Menge aufgegeben. An ihrer Stelle werden Molekularströme als Ursache des stofflich bedingten Feldes eingeführt. Man erhält dann die Grundgleichungen in der gleichen Form, wie sie die Grundgleichungen der Elektronentheorie von H. A. Lorentz haben. Anschließend wird eine Kontinuumsstheorie des elektromagnetischen Makrofeldes entwickelt. Diese vom Verfasser als „Variante“ bezeichnete Theorie ist von größter Einfachheit; ausgezeichnet durch ein elektrisches und ein magnetisches Feld und eine Art von Elektrizitätsmengen. Die stofflichen Charakteristiken, die noch in Form von Verknüpfungsgleichungen zu den Grundgleichungen der Maxwellschen Theorie hinzutreten, fallen hier weg. Über das elektromagnetische Verhalten der Materie kann nichts ausgesagt werden. Ausgehend von den neuen Grundgleichungen werden dielektrische Stoffe, magnetisierbares Material und das allgemeine elektromagnetische Feld untersucht.

Das geistreiche Büchlein wendet sich in gleicher Weise an Physiker und Elektrotechniker und wird von jedem Theoretiker dieser Fächer mit großem Interesse studiert werden.

R. Bruniak, Wien.

Zur mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen. Von *C. Müller*. (Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse; Jahrgang 1945/46, Nr. 3.) Mit 6 Textabb., 56 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1950.

Die Untersuchung setzt oszillierende Funktionen voraus und spielt sich entsprechend im komplexen Bereich ab. Es wirkt etwas bizarr, wenn gleich anfänglich auch der magnetische

Strom eingeführt wird; eine solche „Symmetrierung“ ist vom ästhetischen Standpunkt verständlich, vom sachlichen aber weniger gerechtfertigt. Behandelt werden zuerst die Vorgänge in homogenen, dann in inhomogenen Medien. Bezug genommen wird unter anderen auf die Arbeiten von Kellogg, Sommerfeld, Stratton.

Das Gebiet der elektromagnetischen Vorgänge erfordert zu seiner Erfassung oder auch nur Aufhellung in manchen Abschnitten einen außerordentlichen Aufwand mathematischer Entwicklungen. Insbesondere das hier genauer behandelte Ausstrahlungsproblem reicht in eine noch unergründete Tiefe. Wenn Einfachheit das Kennzeichen der Wahrheit ist, dann sind wir von dieser in diesem Bereich noch weit entfernt. Jedenfalls hat sich der Verfasser seine Aufgabe nicht leicht gemacht und einen Baustein zu den Problemen der elektromagnetischen Schwingungen geliefert.

L. Kneissler, Wien.

Mathematical Engineering Analysis. Von R. Oldenburger. Mit 220 Textabb., XIV, 426 S. New York: The Macmillan Company. 1950. Geb. \$ 6.—.

Wenn man den Titel etwa übersetzt „Mathematische Untersuchungen im Ingenieurwesen“, so kennzeichnet man damit auch gleich den Charakter des Werkes. Es bietet Ausschnitte aus allen Gebieten der Mechanik, aber auch aus Wärmelehre und Elektrizität.

Das Buch hat keinerlei Ähnlichkeit mit einem kurzgefaßten Lehrbuch der Physik, vielmehr wird vom Leser die Kenntnis der physikalischen Grundgesetze vorausgesetzt. Auch an die mathematischen Vorkenntnisse werden einige Anforderungen gestellt. Der Leser muß mit dem Lösen von Differentialgleichungen, mit Gebietsintegralen und den Sätzen der Vektoranalysis vertraut sein. Der Autor fordert den Leser geradezu auf, diese Kenntnisse zu erwerben, denn ... wer in der Forschung tätig ist, kann nie genug Mathematik lernen“.

Das Werk wendet sich also an Ingenieure, die in Forschung und Entwicklung tätig sind und will Anregungen geben, technische Probleme auch durch theoretische Behandlung zu lösen. Nach Ansicht des Autors gibt es genügend Fälle, in denen eine theoretische Untersuchung rationeller ist als eine experimentelle. Der Zweck dieses Buches soll es nun sein, hierfür einen Weg zu weisen. Dieser Weg geht von den als bekannt vorausgesetzten physikalischen Tatsachen aus und zeigt, wie sich daraus viele grundlegende Probleme der Ingenieurwissenschaften in mathematisch-theoretischer Form lösen lassen. Dabei wird besonders darauf hingewiesen, welche vereinfachende Annahmen jeweils notwendig, aber auch zulässig sind, um eine exakte mathematische Behandlung zu ermöglichen.

Auf diese Weise entsteht eine Darstellung des Stoffes, die, zunächst unzusammenhängend, wie eine bloße Beispielsammlung anmutet. Als solche scheint das Buch aber auch gedacht zu sein, nämlich Beispiele dafür zu bieten, daß sich die Mathematik bei allen möglichen technischen Problemen anwenden läßt. In diesem Sinne mag das Buch für Studierende an unseren technischen Hochschulen wertvoll sein, die nach vier Semestern Mathematikvorlesung oft die Frage stellen, ob sie denn das mühsam Gelernte auch jemals im Beruf werden brauchen können. Ob das Buch den beabsichtigten Zweck wirklich erfüllt, müßte freilich erst die Aufnahme in der Praxis zeigen.

Einige Kapitel des Buches sind übrigens abweichend von der oben beschriebenen Art abgefaßt. Und zwar die Kapitel über Entropie und über elektromagnetische Felder. Hier bemüht sich der Verfasser, nur einen Überblick über die physikalischen Tatsachen zu geben. Anwendungsbeispiele aus der Technik fehlen. Dies ist schade, denn im Kapitel über elektromagnetische Felder ließe sich geradezu ein Standardbeispiel für mathematisch-theoretische Betrachtungsweise eines Problems in den Berechnungen der Polschuhformen des Betatrons geben.

169 Aufgaben samt Lösungen erhöhen den Wert des Buches für Studierende.

H. Haberl, Wien.

Grundlagen der Aeromechanik und Flugmechanik. Von A. Pröll. Mit 278 Textabb., XVI, 612 S. Wien: Springer-Verlag. 1951. Geb. S 240.—, sfr. 49.50, \$ 11.50, DM 48.—.

Das Buch erfüllt zwei Aufgaben: Es gibt, wie sein Titel sagt, eine grundlegende lehrbuchmäßige Darstellung des Gesamtgebietes der Aeromechanik und Flugmechanik und füllt so eine schon lang bestehende Lücke. Darüber hinaus hat der Verfasser aber auch einen sehr brauchbaren Führer durch die neuere aerodynamische Literatur geschaffen.

Im ersten Hauptteil (Aeromechanik) bereitet die Besprechung der physikalischen Grundlagen und anschließend der Kinematik und Dynamik der Strömungen auf die eigentliche Flugaerodynamik vor. Obwohl diese Abschnitte allgemein gehalten sind, wird schon hier durch Bemerkungen und Beispiele auf die Erfordernisse der Flugtechnik Bezug genommen.

Die eigentliche Flugzeugaerodynamik beginnt mit einer ausführlichen Darstellung der Flügelprofiltheorie; dabei wurden auch neuere Arbeiten auszugsweise berücksichtigt, z. B. von Betz, Keune, Theodorsen und Weinig. Im selben Abschnitt wird außerdem noch die Berechnung der Potentialströmung um achsensymmetrische Körper besprochen.

Der nächste Abschnitt behandelt die Strömung mit Widerstand, wobei besonders einer eingehenden Darstellung der Grenzschichttheorie und ihrer Anwendungen viel Raum gewidmet ist.

Es folgt die Untersuchung des Tragflügels endlicher Spannweite (räumliches Problem). Der konstruktiv tätige Ingenieur wird es besonders begrüßen, daß das einfache Näherungsverfahren von O. Schrenk wiedergegeben ist. Mit dessen Hilfe kann man die Auswirkung konstruktiver Änderungen auf die Beanspruchung des Tragflügels schnell und mit ausreichender Genauigkeit ermitteln. Auch der Doppeldecker wird in diesem Abschnitt noch eingehend behandelt.

Abgeschlossen wird der aeromechanische Teil mit einem Überblick über die Gasdynamik, was besonders im Hinblick auf die moderne Entwicklung der Düsen- und Raketenflugzeuge sehr wertvoll ist. Außer den Grundlagen dieses Wissenszweiges findet man auch einiges über Profilformen, Auftrieb, Wellenwiderstand und induzierten Widerstand im Überschallbereich.

Der zweite Hauptteil (Flugmechanik) beginnt mit der Erläuterung der wichtigsten flugmechanischen Begriffe und Diagramme, dann folgt ein allgemeiner Abschnitt über Flugleistungen, der sich mit dem Triebwerk, der Luftschraube und mit ihrem Zusammenwirken beim Flug befaßt. In diesem Zusammenhang wird auch ein Überblick über die Theorie der Luftschraube und ihre Anwendungen gegeben. Außerdem findet man zahlreiche graphische Darstellungen von Versuchsergebnissen vorwiegend amerikanischer Herkunft. Zahlenbeispiele erhöhen noch die Brauchbarkeit dieser Hilfsmittel.

Im nächsten Abschnitt bespricht der Verfasser die Geschwindigkeitsleistungen des Flugzeuges. Auch hier werden wieder ausführliche Unterlagen für den Entwurf geboten und durch Zahlenbeispiele vervollständigt. Dasselbe gilt für den IV. und V. Abschnitt, in denen die Berechnungen der Steigleistungen und der Reichweite behandelt werden.

Im Abschnitt VI werden nichtstationäre Flugzustände besprochen, wobei für die Praxis besonders die Untersuchung von Start- und Landevorgang wichtig ist. Ferner wird auch noch der Einfluß kleiner Änderungen der Hauptdaten eines Flugzeuges auf die Flugleistungen untersucht. Ein wertvolles Hilfsmittel für den Entwurfsingenieur.

Die beiden letzten Abschnitte sind hauptsächlich der Untersuchung der statischen und dynamischen Stabilität gewidmet. Diese ist unter Benützung auch neuerer Literatur (Jakobs, Braun-Scharn, Schlichting-Ulrich, Solf) so eingehend durchgeführt, daß der Leser alle wichtigen Aufgaben der Praxis lösen kann. Erwähnenswert ist unter anderem ein Näherungsverfahren des Verfassers, das zu einer schnellen ersten Orientierung über die dynamische Stabilität sehr geeignet erscheint. Betrachtungen über Kunstflug, Steuerwirkung sowie Autorotation und Trudeln sind ebenfalls im letzten Abschnitt enthalten, der auch noch einige Angaben über Flugzeugstatik bringt (Belastungsfälle, Beanspruchungsgruppen u. a. m.).

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß jeder, der sich mit Fragen des Flugzeugbaues oder der Luftfahrtforschung befaßt, dieses reichhaltige Buch braucht. Darüber hinaus wird es auch allen, die sonst in der Strömungstechnik tätig sind, wertvolle Anregungen und Unterlagen bieten.

E. Souczek, Wien.

Experiments on Aerodynamic Cooling. Von *L. F. Ryan*. — **Untersuchungen an einem Gegenlaufpropeller im Windkanal.** Von *M. Degen*. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich. Herausgegeben von J. Ackeret: Nr. 18.) Mit 30 und 17 Textabb., 65 S. Zürich: Verlag Leemann. 1951.

Die bekannten und ausgezeichneten Mitteilungen aus dem Züricher aerodynamischen Institut bringen in ihrer letzten Nummer zwei interessante Untersuchungen, von denen die erste die Bestimmung der Oberflächentemperaturen von Körpern im Luftstrom mit Unterschallgeschwindigkeit behandelt und die zweite die Ergebnisse von Messungen an einem Gegenlaufpropeller, der schon vor Jahren entwickelt wurde, in schönen Diagrammen darstellt.

In der ersten Arbeit wurden Druck- und Temperaturmessungen an Kreiszylindern, Halbzylindern, zylindrischen Körpern und am Halbkörper gemacht. Außerdem findet man eine Anzahl von Temperaturverteilungsmessungen an der Oberseite eines NACA-Profiles für verschiedene Machzahlen und Anstellwinkel. Auch im Ablösungsgebiet wurden vom Verfasser die Temperaturen, die in Übereinstimmung mit einer früheren Beobachtung von Eckert und Weise sehr tiefe waren, gemessen und Schlierenaufnahmen gemacht. Die Messungen sind sehr präzise aufgebaut und durchgeführt worden. Auch die Theorie wurde herangezogen und entsprechende Vergleiche angestellt.

In der zweiten Arbeit findet man schöne Schub- und Drehmomentmessungen in Verbindung mit verschiedenem Fortschrittsgrad und Blattwinkel. Wie der Verfasser richtig bemerkt, wäre es sehr interessant, solche Versuche in Hochgeschwindigkeitskanälen fortzusetzen.

Beide Arbeiten sind eine schöne Bereicherung der aerodynamischen Forschung.

R. Bruniak, Wien.

Dielectric Breakdown of Solids. Von *S. Whitehead*. (Monographs on the Physics and Chemistry of Materials. Herausgegeben von W. Jackson, H. Fröhlich, N. F. Mott.) Mit 75 Textabb., XV, 271 S. Oxford: At the Clarendon Press. 1951. Geb. 25s. net.

Das Buch bildet den 8. Band der „Monographs on the Physics and Chemistry of Material“, die sich die Zusammenfassung der letzten Ergebnisse der theoretischen und experimentellen Forschung auf dem Gebiete der Materialuntersuchung zur Aufgabe gemacht hat. Es setzt die in derselben Serie erschienenen Untersuchungen des Professors Fröhlich, *Theory of Dielectrics, Dielectric Constants and Dielectric Loss*, fort. Die auf diesem Gebiet erzielten Fortschritte gehen parallel zu der in letzter Zeit erlangten gewaltigen Erweiterung der theoretischen und praktischen Erkenntnisse der Struktur der Materie. Gewisse Schwierigkeiten beim Studium des Buches macht die wechselweise Verwendung des praktischen M. K. S. und des physikalischen Gauß-Systems. Die sieben Kapitel, in die das Buch eingeteilt ist, sind in sich abgerundet und lassen sich auch einzeln zum Studium und zur Information verwenden. Es wendet sich hauptsächlich an die Physiker der Universitäten, des öffentlichen Dienstes, der Industrie und in den Laboratorien.

E. F. Petritsch, Wien.

Berichtigung.

Österreichisches Ingenieur-Archiv, Band V (1950), S. 129—137. M. Z. v. Krzywoblocki, On Complete Forms in a Turbulent Three-Dimensional Flow of Compressible Viscous Fluid.

Recently, there took place a discussion on proper forms of equations of continuity and state in the so-called mixing length theory (*Applied Mechanics Review*, 4, 7, July, 1951, p. 396).

In connection with the discussion the author emphasizes the fact that in Eq. (7) of the original paper it is assumed that the fictitious mean flow satisfies in itself continuity equation and that the pressure $\bar{p} = \bar{p}_0 + \bar{p}' = \bar{p}_0 = R \bar{\rho}_0 \bar{T}_0$ always obeys the equation of state of perfect gases. This means that all the other terms which arise from the averaging process in the equation of state must vanish. But Eq. (7) is not utilized in any of the proposed tensors. Consequently, any other form of Eq. (7) can be used without any changes in the proposed tensors. This may only add a few new tensors or vectors for the new forms of those two equations. The discussion which forms of the equations of continuity and state are correct is beyond the scope of the present paper. In the case one wants to preserve more terms in the equation of state, it may arise that the average quantities will no longer satisfy the equation of a perfect gas. Certain remarks on that subject are in L. G. Alexander, T. Baron, E. W. Comings. *Transport of Momentum, Mass and Heat in Turbulent Jets*, University of Illinois, Engineering Experiment Station, Technical Report No. 8, Contract N 6-Ori-71, Task Order No. XI, Office of Naval Research, Navy Department, September 1950. The authors that report arrived to the conclusion that if ϱ' is not identically equal to zero, then the ideal gas law is not satisfied by the mean components of pressure, temperature and density. One may maintain that all such discussions are of an academic character since anyhow the assumption underlying the mixing length hypothesis are highly problematic and, theoretically, uncertain.

Die Übersetzungen der Zusammenfassungen wurden vom Dokumentations-Zentrum der Technik, Wien, durchgeführt.

Herausgeber und Eigentümer: Springer-Verlag in Wien I, Mölkerbastei 5. — Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Franz Magyar, Wien IV, Technische Hochschule, Karlsplatz 13. — Druck: Manzsche Buchdruckerei, Wien IX, Lustkandlgasse 52.

Soeben erschien:

Ebene und räumliche Rahmentragwerke

Von

Dr.-Ing. Viktor Kupferschmied

Oberingenieur der Zentralverwaltung der Bauunternehmung Carl Brandt, Düsseldorf

Mit 252 Textabbildungen. VII, 196 Seiten. 1952

Ganzleinen S 174.—, DM 35.70, \$ 8.50, sfr. 37.—

Ebene und räumliche Rahmentragwerke lassen sich auf einheitlicher Grundlage berechnen. Der Verfasser geht dabei von dem Nachweis aus, daß der durch die Belastung eines Rahmens verursachte Formänderungszustand aus bekannten Formänderungszuständen abgeleitet werden kann. Als Ausgangssystem wird der „Rahmen mit verschiebblichen, aber unverdrehbaren Knoten“ eingeführt, ein System, das sich für jeden Verschiebungszustand einfach berechnen läßt, da in ihm alle Stäbe in den Knoten fest eingespannt sind. Die praktische Anwendung der Methode wird durch eine Reihe von Zahlenbeispielen erleichtert, die so gewählt sind, daß in Anlehnung an sie jede Rahmenform bei beliebiger Belastung berechnet werden kann. Die grundlegenden Gedanken der Behandlung der Rahmentragwerke in der vorliegenden Art folgen aus der „Deformationsmethode“ von Ostenfeld (Verlag Julius Springer, Berlin 1925) und dem Momentenausgleichsverfahren von Cross. Das Buch wendet sich in erster Linie an den angehenden Ingenieur. Einige Kapitel, wie z. B. die Berechnung von Rahmen mit Zugbändern, die Vereinfachungsmöglichkeiten bei der Berechnung räumlicher Rahmentragwerke durch Wahl bestimmter Stabquerschnitte, die Berechnung von durch Decken ausgesteifter räumlicher Rahmentragwerke und namentlich die im Anhang gebrachte unmittelbare Berechnung des zweistöckigen Stockwerkrahmens und des Virendeelträgers sind aber auch für den erfahrenen Konstrukteur von größtem Interesse.

Soeben erschien:

Dampferzeugung Dampfkessel, Feuerungen Theorie, Konstruktion, Betrieb

Von

a. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Maximilian Ledinegg

Technische Hochschule Wien

Mit 415 Textabbildungen, davon 8 als Ausschlagtafeln. XII, 427 Seiten. 4°. 1952

Ganzleinen S 396.—, DM 79.—, \$ 18.80, sfr. 81.80

Die Entwicklung des modernen Kesselbaues, die mit der Einführung des Hochdruckdampfes ihren Anfang nahm, ist seither ständig in Fluß geblieben und hat gerade in der neuesten Zeit bedeutende Fortschritte gemacht. Dasselbe gilt für die Feuerungstechnik und die Theorie der Vorgänge bei der Dampferzeugung. Der Studierende, der Konstrukteur und der Betriebsmann werden daher ein Buch begrüßen, das über den gegenwärtigen Stand auf diesem wichtigen und vielseitigen Gebiet Auskunft gibt. Der Verfasser, ein bekannter Fachmann, der langjährige Praxis in der Industrie mit der Erfahrung des akademischen Lehrers verbindet, weiß, worauf es dem einzelnen ankommt: der Studierende benötigt eine Einführung in die Theorie und Konstruktion, der Konstrukteur braucht Unterlagen für seine speziellen Aufgaben, der wissenschaftlich arbeitende Student und Ingenieur will tiefer in die Theorie eindringen und der Betriebsmann möchte erfahren, welche Gefahren seiner Anlage drohen und wie er ihnen begegnen kann. Allen diesen Ansprüchen kommt das vorliegende Buch entgegen. Besonders eingehend wird die Theorie des Wärmeüberganges, des Wasserumlaufes bei Wasserrohr- und Sonderkesseln sowie der Verbrennungsvorgänge bei Kohlenstaub- und Rostfeuerungen behandelt. Bei der Behandlung der Einzelteile der Dampfkessel sind außer Überhitzer, Wasser- und Luftvorwärmer auch Gerüst und Mauerung ausführlich berücksichtigt. Dabei werden dem Konstrukteur möglichst alle für den Entwurf erforderlichen Angaben geliefert.

Hauptabschnitte: Dampfkessel. — Feuerungen. — Brennstoffe. — Der Wasserdampf. — Wirkungsgrade und Wärmeverluste bei Dampfkesseln. — Lehre vom Wärmeübergang. — Zugbedarf. — Wärmetechnische Berechnung von Dampfkesseln. — Wasserumlauf. — Speicherkapazität von Dampfkesseln. — Der notwendige Dampfdruck. — Chemische Aufbereitung des Speisewassers. — Theorie der Feuerungen. — Einzelteile im Dampfkesselbau. — Werkstoff. — Festigkeitsberechnung von Dampfkesseln.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Mit dem soeben erschienenen zweiten Band ist vollständig geworden:

Handbuch des Wasserbaues

Von

Dipl.-Ing. Dr. techn. Dr.-Ing. h. c. Armin Schoklitsch

Professor der Universidad Nacional de Tucumán, Argentinien

In zwei Bänden

Zweite, neubearbeitete Auflage

Erster Band

Mit Textabbildung 1 bis 722 und Zahlentafel 1 bis 87. X, Seite 1 bis 478. 4°. 1950

Zweiter Band

Mit Textabbildung 723 bis 2049 und Zahlentafel 88 bis 113. VIII, Seite 479 bis 1072. 4°. 1952

Das Werk wird nur noch geschlossen abgegeben

Preis für das Gesamtwerk, zwei Bände in Ganzleinen:

S 777.—, DM 155.40, \$ 37.—, sfr. 159.—

Das zweibändige Werk von *Schoklitsch*, das erstmalig 1930 erschien und seither in englischer und spanischer Sprache herauskam, behandelt alle Fragen des Wasserbaues so ausführlich, daß es mit Recht als das Handbuch des Wasserbaues gelten kann. Der große Erfolg des Werkes in allen Fachkreisen hat den Verfasser bewogen, die Einteilung der ersten Auflage beizubehalten und den Stoff nur dem Fortschritt entsprechend umzuarbeiten und zu ergänzen.

Hauptabschnitte. I. Band: Meteorologie. — Gewässerkunde und Hydraulik. — Die Wasserversorgung. — Die Ortsentwässerung. — II. Band: Stauwerke und Entnahmeanlagen. — Wasserkraftanlagen. — Meliorationen. — Der Flußbau. — Verkehrswasserbau.

Aus Besprechungen der ersten Auflage:

„...Es wird wohl kaum ein Gebiet des Wasserbaues geben, das hier nicht so ausführlich behandelt wäre, daß man sich nicht — besonders mit Hilfe des reichen Schrifttumsnachweises — über jede Frage eingehend unterrichten könnte. Mehr und besseres Lob kann man einer solchen Arbeit nicht spenden, umsomehr, da es ja zu selbstverständlich ist, daß der Verlag Springer für die vornehmste Ausstattung gesorgt hat.“

Ingenieur-Zeitschrift

Die „Kernring-Auskleidung“ im Druckstollen „Kops-Vallüla“ der Vorarlberger Illwerke Aktiengesellschaft. Von Dipl.-Ing. Dr. techn. Alois Kieser, behördl. aut. Zivilingenieur für Bauwesen, Bregenz. Mit 12 Textabbildungen. III, 31 Seiten. 1951. (Schriftenreihe des Österreichischen Wasserwirtschaftsverbandes, Heft 21.)

Steif geheftet S 10.—, DM 2.—, \$ —.50, sfr. 2.20

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria